WARSZAWSKI UNIWERSYTET MEDYCZNY

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

SKRYPT DLA STUDENTÓW

pod redakcją Bartosza Kózki

FARMACJA

ANALITYKA MEDYCZNA

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

STATYSTYKA

ANALIZA DANYCH

WIZUALIZACJA WYNIKÓW

INTERPRETACJA

WARSZAWA
2026

WARSZAWSKI
UNIWERSYTET
MEDYCZNY

WARSZAWSKI UNIWERSYTET MEDYCZNY

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

SKRYPT DLA STUDENTÓW

pod redakcją Bartosza Kózki

Warszawa 2026

Autorzy:

mgr Agnieszka Kalicka	Rozdziały 3, 6, 9
dr Krzysztof Adam Stępień	Rozdziały 2, 5
dr Bartosz Kózka	Rozdziały 1, 4, 7, 8

Recenzenci:

dr n. tech. Zbigniew Rymarczyk
dr n. farm. Paweł Siudem

Wydano za zgodą Uczelnianej Rady ds. Kształcenia WUM

ISBN 978-83-7637-680-6

Wydano w Sekcji Druków Uczelnianych
Warszawskiego Uniwersytetu Medycznego
tel. (22) 57 20 329
e-mail: wydawnictwo@wum.edu.pl
www.drukiuczelniane.wum.edu.pl

Pamięci śp. dr. n. fiz. Marka Waska,

naszego Nauczyciela i Mentora,

którego wiedza, doświadczenie dydaktyczne i zaangażowanie w nauczanie biofizyki stanowiły dla nas źródło inspiracji.

Jego wcześniejsze opracowanie stało się zalążkiem niniejszego skryptu, a pozostawiony przez Niego dorobek ważnym punktem odniesienia podczas jego przygotowywania.

Oddając tę publikację w ręce Czytelników, pragniemy wyrazić naszą wdzięczność oraz zachować pamięć o Jego wkładzie w kształcenie kolejnych pokoleń studentów.

Autorzy

PRZEDMOWA

Oddany do rąk Czytelników skrypt „Opracowanie wyników pomiarów” został przygotowany z myślą o studentach kierunków Farmacja oraz Analityka Medyczna realizujących zajęcia z Biofizyki, a także innych przedmiotów wykorzystujących metody ilościowe i analizę danych pomiarowych. Jego celem jest przedstawienie podstawowych zagadnień związanych z wykonywaniem, opracowywaniem i interpretacją wyników pomiarów, które stanowią nieodłączny element pracy laboratoryjnej w naukach farmaceutycznych, medycznych i przyrodniczych. Prawidłowe opracowanie wyniku pomiarowego wymaga nie tylko znajomości metod statystycznych, lecz również umiejętności posługiwania się jednostkami miar, wykonywania obliczeń, oceny jakości uzyskiwanych wyników oraz szacowania niepewności pomiarowych. Z tego względu skrypt obejmuje zarówno zagadnienia podstawowe, takie jak układ jednostek miar SI, wielokrotności i podwielokrotności jednostek czy przekształcanie wzorów matematycznych, jak również nieco bardziej zaawansowane elementy analizy statystycznej danych przy ograniczeniu ich matematycznego opisu do niezbędnego minimum. W kolejnych rozdziałach omówiono podstawowe pojęcia statystyczne, najważniejsze rozkłady prawdopodobieństwa wykorzystywane w naukach eksperymentalnych, metody szacowania wartości wielkości mierzonej oraz procedury wykrywania błędów grubych. Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniom związanym z oceną jakości wyników pomiarowych oraz niepewnością pomiarową, która stanowi obecnie jeden z najważniejszych elementów opisu każdego wyniku eksperymentalnego. Istotną część skryptu stanowią zagadnienia dotyczące zależności funkcyjnych pomiędzy wielkościami fizycznymi. Omówiono podstawy regresji, analizę dopasowania modeli do danych eksperymentalnych, metody linearyzacji oraz różne odmiany regresji liniowej. Przedstawiono również zasady poprawnego sporządzania wykresów oraz ich rolę w analizie wyników pomiarów. Z uwagi na powszechne wykorzystanie narzędzi komputerowych w analizie danych, osobny rozdział

poświęcono praktycznemu wykorzystaniu programu Microsoft Excel do wykonywania obliczeń i opracowywania wyników pomiarów. W końcowej części skryptu zamieszczono zestaw tablic statystycznych i matematycznych przydatnych podczas samodzielnego rozwiązywania zadań i opracowywania wyników doświadczeń.

Przy opracowywaniu materiału starano się zachować równowagę pomiędzy formalizmem matematycznym, a praktycznym podejściem do zagadnień pomiarowych. Z tego względu większość tematów przedstawiono w sposób możliwie przystępny, ilustrując je przykładami obliczeń oraz wskazując ich zastosowanie w praktyce laboratoryjnej. Autorzy mają nadzieję, że skrypt będzie pomocny zarówno podczas zajęć dydaktycznych, jak i w późniejszej pracy zawodowej, wymagającej krytycznej analizy danych eksperymentalnych oraz świadomej interpretacji wyników pomiarów.

Spis treści

1. ZAGADNIENIA WSTĘPNE 11
1.1. Jednostki – układ SI 11
1.2. Podwielokrotności i wielokrotności jednostek 14
1.3. Zamiana jednostek 15
1.4. Przekształcanie wzorów 17
2. ELEMENTY STATYSTYKI W OPRACOWANIU WYNIKU POMIAROWEGO 19
2.1. Podstawowe pojęcia w statystyce. 19
2.2. Podstawowe rozkłady statystyczne 21
2.2.1. Rozkład normalny 21
2.2.2. Rozkład t-Studenta 23
2.2.3. Rozkład χ^2 (chi-kwadrat) 24
3. SZACOWANIE WARTOŚCI WIELKOŚCI MIERZONEJ 27
3.1. Pojęcie terminu „pomiar” 27
3.2. Wartości wielkości mierzonej – pomiar wielokrotny 28
3.2.1. Wstęp 28
3.2.2. Mediana 28
3.2.3. Średnia arytmetyczna 29
3.2.4. Średnia ważona 30
3.2.5. Średnia geometryczna 32
3.2.6. Średnia harmoniczna 32
3.3. Wykrywanie błędu grubego – test Q-Dixona 32
4. JAKOŚĆ WYNIKU POMIAROWEGO 37
4.1. Wprowadzenie 37
4.2. Precyzja 37
4.3. Poprawność 38
4.4. Dokładność 38

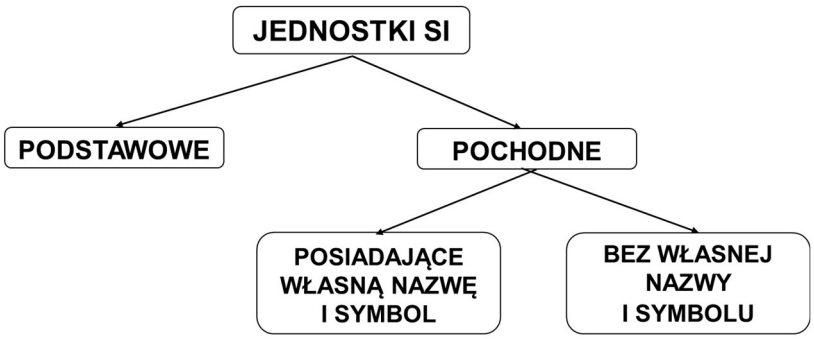
5. NIEPEWNOŚĆ POMIAROWA 43
5.1. Wiadomości ogólne 43
5.2. Niepewność typu A 44
5.3. Niepewność typu B 45
5.4. Niepewność składana typu A i B 47
5.5. Niepewność złożona 48
5.6. Niepewność ważona 54
5.7. Niepewność rozszerzona 55
5.8. Niepewność względna 56
5.9. Inne sposoby szacowania niepewności dla serii pomiarowej 56
5.10. Niepewność pomiarowa w chemii 58
6. ZAOKRĄGLANIE 61
6.1. Przedstawianie wartości wielkości mierzonej 61
6.2. Cyfry znaczące 62
6.3. Zaokrąglanie wartości wielkości obarczonej niepewnością 62
6.4. Zapisywanie wartości wielkości obarczonej niepewnością 64
6.5. Kryterium zbieżności 65
7. ZALEŻNOŚCI FUNKCYJNE MIĘDZY WIELKOŚCIAMI 69
7.1. Zależności funkcyjne: znajdowanie wartości niezmierzonych 69
7.2. Regresja 70
7.3. Regresja liniowa 71
7.4. Test χ^2 76
7.5. Linearyzacja 79
7.6. Znaczenie wykresów w regresji 81
7.7. Reguły rysowania wykresów w fizyce 83
7.8. Inne rodzaje regresji liniowej 85
7.8.1. Komentarz wstępny 85
7.8.2. Regresja zwyczajna 86
7.8.3. Regresja ważona 86
7.8.4. Regresja Deminga 87

8. OBLICZENIA W PROGRAMIE MS EXCEL 91
8.1. Program Excel – wstęp 91
8.2. Podstawowe funkcje i formuły w programie MS Excel 91
8.3. Zaznaczanie komórek 93
8.4. Kopiowanie (przeciąganie) formuły 93
8.5. Ciąg arytmetyczny 94
8.6. Regresja liniowa – funkcja REGLINP 95
9. TABLICE 99
9.1. Alfabet grecki 99
9.2. Tablica rozkładu Q-Dixona 100
9.3. Tablica rozkładu t-Studenta 101
9.4. Tablica rozkładu χ^2 103
9.5. Podstawowe stałe matematyczne 104
9.6. Logarytmy 104
9.7. Pochodne funkcji 105

1. ZAGADNIENIA WSTĘPNE

1.1. Jednostki – układ SI

Międzynarodowy Układ Jednostek SI (fr. ***S**ystème **I**nternational d'Unités*) to ustandaryzowany układ jednostek zatwierdzony w 1960 r., który definiuje jednostki stosowane w naukach ścisłych. Formalnie jednostki nie są narzucone, ale nawyk wyrażania wielkości w obliczeniach według ustandaryzowanego systemu minimalizuje ryzyko, że ostateczna wartość będzie nieprawidłowa. Układ SI ewoluował, a jego obecna postać została ustanowiona 20 maja 2019 r. podczas 26. Generalnej Konferencji Miar. Klasyfikację jednostek SI przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1. Podział jednostek układu SI

Grupa **jednostek podstawowych** obejmuje 7 jednostek: sekunda, metr, kilogram, amper, kelwin, mol, kandela. Ich zapis skrótowy, wielkości opisywane i wielkości definiujące zostały przedstawione w Tabeli 1. Należy zwrócić uwagę, że **dla masy jednostką podstawową SI jest kilogram**, a nie gram!

Tabela 1. Charakterystyka jednostek podstawowych SI. W ostatniej kolumnie jednostki stałych celowo wyrażono w jednostkach podstawowych

Jednostka	Symbol	Wielkość opisywana	Wielkość definiująca
sekunda	s	czas	Częstotliwość cezowa: $\Delta\nu_{Cs} = 9192631770$ **Hz** [Hz] = [$\mathbf{s}^{-1}$]
metr	m	długość, wymiar liniowy w przestrzeni	Prędkość światła w próżni: $c = 299792458$ **m**·s^{-1}
kilogram	kg	masa	Stała Plancka: $h = 6{,}62607015\cdot10^{-34}$ **kg**·$m^2\cdot s^{-1}$
amper	A	natężenie prądu elektrycznego	Ładunek elementarny: $e = 1{,}602176634\cdot10^{-19}$ **A**·s
kelwin	K	temperatura	Stała Boltzmanna: $k = 1{,}380649\cdot10^{-23}$ kg·$m^2\cdot s^{-2}\cdot$**K**$^{-1}$
mol	mol	liczność materii	Liczba Avogadra: $N_A = 6{,}02214076\cdot10^{23}$ **mol**$^{-1}$
kandela	cd	światłość	Skuteczność świetlna źródła promieniowania o częstotliwości 540 THz: $K_{cd} = 683$ **cd**·sr·$kg^{-1}\cdot m^{-2}\cdot s^3$

Jednostki pochodne to jednostki, które mogą być wyrażone za pomocą jednostek podstawowych. Niektóre z nich posiadają własną nazwę i symbol, a inne (mimo częstego użycia) ich nie posiadają. Jednostek pochodnych jest wiele, a ich przykłady przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Przykłady jednostek pochodnych SI

Jednostka	Symbol	Wielkość	Odpowiedniki w innych jednostkach	
			Definicja zwyczajowa	Postać w jednostkach podstawowych
JEDNOSTKI POCHODNE Z WŁASNĄ NAZWĄ I SYMBOLEM				
herc	Hz	częstotliwość	s^{-1}	
niuton	N	siła	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	
paskal	Pa	ciśnienie	$N \cdot m^{-2}$	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
dżul	J	energia, praca	$N \cdot m$ $C \cdot V$ $W \cdot s$	$kg \cdot m^{2} \cdot s^{-2}$
wat	W	moc, strumień energii	$J \cdot s^{-1}$ $V \cdot A$	$kg \cdot m^{2} \cdot s^{-3}$
stopień Celsjusza	°C	temperatura	K	
om	Ω	opór elektryczny	$V \cdot A^{-1}$	$kg \cdot m^{2} \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
siemens	S	przewodność elektryczna	Ω^{-1} $A \cdot V^{-1}$	$s^{3} \cdot A^{2} \cdot m^{-2} \cdot kg^{-1}$
tesla	T	indukcja magnetyczna	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
luks	lx	natężenie oświetlenia	$lm \cdot m^{-2}$	$cd \cdot m^{-2}$
bekerel	Bq	aktywność promieniotwórcza	s^{-1}	
grej	Gy	dawka pochłonięta	$J \cdot kg^{-1}$	$m^{2} \cdot s^{-2}$
siwert	Sv	równoważnik dawki pochłoniętej	$J \cdot kg^{-1}$	$m^{2} \cdot s^{-2}$
JEDNOSTKI POCHODNE BEZ WŁASNEJ NAZWY I SYMBOLU				
–	–	prędkość	$m \cdot s^{-1}$	
–	–	przyspieszenie	$m \cdot s^{-2}$	
–	–	gęstość, stężenie masowe	$kg \cdot m^{-3}$	
–	–	pęd	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$	

1.2. Podwielokrotności i wielokrotności jednostek

Dla małych lub dużych wartości stosowanie *stricte* jednostek SI może być niewygodne. O ile w obliczeniach jest to wręcz konieczne, o tyle w formie sprawozdawczej, w uzasadnionych przypadkach, wygodnie jest posługiwać się podwielokrotnościami i wielokrotnościami jednostek, które odnoszą się do konkretnych mnożników. Dzięki temu małe lub duże wartości (z dużą liczbą zer w zapisie dziesiętnym) mogą być przedstawione z wykorzystaniem potęgi liczby 10. Podwielokrotności i wielokrotności jednostek w zakresie mnożników od 10^{-15} do 10^{15} przedstawia Tabela 3.

Tabela 3. Podwielokrotności i wielokrotności jednostek

Mnożnik	**Potęga liczby 10**	**Nazwa**	**Symbol**
PODWIELOKROTNOŚCI			
10^{-15}	-15	femto	f
10^{-12}	-12	piko	p
10^{-9}	-9	nano	n
10^{-6}	-6	mikro	μ
10^{-3}	-3	mili	m
10^{-2}	-2	centy	c
10^{-1}	-1	decy	d
WIELOKROTNOŚCI			
10^{1}	1	deka	da
10^{2}	2	hekto	h
10^{3}	3	kilo	k
10^{6}	6	mega	M
10^{9}	9	giga	G
10^{12}	12	tera	T
10^{15}	15	peta	P

Należy zwrócić uwagę, że Tabela 3 nie dotyczy relacji między jednostkami czasu: sekunda, minuta, godzina, doba, rok, ponieważ ich wzajemne przeliczanie nie bazuje na systemie dziesiętnym.

1.3. Zamiana jednostek

Zamiana jednostek jest jedną z podstawowych czynności podczas opracowywania wyniku pomiarowego. Dlatego ważne jest, aby wykonać ją poprawnie, ponieważ błąd w obliczeniach może prowadzić do wyniku, który nie odzwierciedla rzeczywistości, a co więcej – jest pozbawiony sensu. O ile to możliwe, przy zamianie jednostek najlepiej korzystać z mnożników będących potęgami liczby 10, zamiast tzw. przesuwania przecinka w lewo lub w prawo, które w przypadku popełnienia pomyłki prowadzi do błędu o kluczowym znaczeniu. Zamianę jednostek omówiono na przykładach poniżej.

Przykład P.1.3.1: Zamiana **miligramów na kilogramy**:

$$1\ \text{mg} = ?\ \text{kg}$$

W zamianie jednostek warto stosować następującą metodę:

$$1\ \text{mg} = \frac{\textit{tu należy wpisać } \boldsymbol{\textit{mnożnik jednostki zamienianej}}}{\textit{tu należy wpisać } \boldsymbol{\textit{mnożnik jednostki, na którą zamieniamy}}}\ \text{kg}$$

Stosując powyższą wskazówkę otrzymujemy:

$$1\ \text{mg} = \frac{10^{-3}}{10^{3}}\ \text{kg}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbf{1\ mg = 10^{-6}\ kg}$$

W tym miejscu należy zauważyć, że w przypadku braku symbolu mnożnika po jednej ze stron metoda ta również działa, jednak w liczniku lub mianowniku powstającego ułamka zamiast potęgi liczby 10 pojawia się formalnie liczba 1, wynikająca z braku mnożnika (przykład P.1.3.2):

Przykład P.1.3.2: Zamiana **miligramów na gramy**

$$1\ \text{mg} = \frac{10^{-3}}{1}\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{g}$$

Przykład P.1.3.3: Zamiana **mS·cm^{-1} na S·m^{-1}**

W zamianie jednostek złożonych (np. w postaci ilorazu) zamieniamy jednostki równolegle, zachowując relacje matematyczne między nimi takie jak: mnożenie, dzielenie i potęgowanie.

W pierwszym etapie należy przeprowadzić zamianę jednostek: **mS → S** oraz **cm → m**:

$$1\ \text{mS} = 10^{-3}\ \text{S} \qquad 1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$$

A następnie podstawia się przy zamianie docelowej jednostki:

$$1\ \frac{\text{mS}}{\text{cm}} = \frac{10^{-3}\ \text{S}}{10^{-2}\ \text{m}} = 10^{-1}\ \frac{\text{S}}{\text{m}} = 0{,}1\ \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Przykład P.1.3.4: Zamiana **1 cm^{-2}** na **1 m^{-2}**

W przypadku zamiany jednostek potęgowanych w pierwszym etapie należy zamienić jednostkę znajdującą się w podstawie potęgi, a następnie docelowo potęguje się:

$$1\ \text{cm}^{-2} = (10^{-2}\ \text{m})^{-2} = 10^{4}\ \text{m}^{2}$$

lub w równoznacznym zapisie:

$$1\ \frac{1}{\text{cm}^2} = \frac{1}{(10^{-2}\ \text{m}\ )^2} = \frac{1}{10^{-4}\ \text{m}^2} = 10^{4}\ \frac{1}{\text{m}^2}$$

Jednostki ilorazowe można również zapisać w postaci jednoliniowej, stosując odpowiednią potęgę ujemną:

$$1\ \frac{1}{\text{cm}^2} = 1\ \text{cm}^{-2} = 1 \cdot\ (10^{-2}\text{m}\ )^{-2} =\ 1 \cdot 10^{4}\ \text{m}^{-2}$$

1.4. Przekształcanie wzorów

Umiejętność przekształcania wzorów jest niezbędna przy opracowywaniu wyników pomiarów, szczególnie w sytuacjach, w których należy uwzględnić matematyczny opis zjawisk zachodzących w przyrodzie. W przekształcaniu wzorów postępuje się zgodnie z zasadami kolejności wykonywania działań obowiązującymi przy rozwiązywaniu równań z niewiadomą.

Przykład P.1.4.1: Wyznaczyć $\boldsymbol{c}$ z równania: $n = a \cdot c + b$

Rozwiązanie:

$$a \cdot c = n - b$$

$$c = \frac{n - b}{a}$$

Przykład P.1.4.2: Wyznaczyć $\boldsymbol{n}$ z równania: $R = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{M}{d}$

Rozwiązanie:

$$R(n^2 + 2)d = (n^2 - 1)M$$

$$Rn^2d + 2Rd = n^2M - M$$

$$Rn^2d - n^2M = -M - 2Rd$$

$$n^2(Rd - M) = -M - 2Rd$$

$$n^2 = \frac{-M - 2Rd}{Rd - M}$$

$$n = \sqrt{\frac{-M - 2Rd}{Rd - M}} = \sqrt{\frac{M + 2Rd}{M - Rd}}$$

Przykład P.1.4.3: Wyznaczyć $\boldsymbol{k}$ z równania: $I = I_0 e^{-kx}$

Rozwiązanie:

$$\ln I = \ln(I_0 e^{-kx})$$

$$\ln I = \ln I_0 - kx$$

$$kx = \ln I_0 - \ln I$$

$$k = \frac{\ln I_0 - \ln I}{x} = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I}$$

2. ELEMENTY STATYSTYKI W OPRACOWANIU WYNIKU POMIAROWEGO

2.1. Podstawowe pojęcia w statystyce.

Statystyka jest działem matematyki bazującym na pojęciu **prawdopodobieństwa**, czyli ilościowo określonej możliwości wystąpienia rozpatrywanego zdarzenia w odniesieniu do wszystkich możliwych zdarzeń. Ponieważ statystyka umożliwia weryfikację różnych aspektów badawczych, jej aplikacyjność w opracowywaniu wyników pomiarowych jest niepodważalna. W Tabeli 4 wyjaśniono podstawowe pojęcia statystyczne, które bezpośrednio lub pośrednio dotyczą opracowania wyniku pomiarowego, a przede wszystkim zagadnień poruszonych w niniejszym skrypcie.

Tabela 4. Podstawowe pojęcia w statystyce w kolejności alfabetycznej. Ze względu na wzajemne powiązania definicji i uwag pogrubieniem wyróżniono objaśniane pojęcia

Pojęcie	Oznaczenie	Definicja	Uwagi
Błąd I rodzaju	–	Błąd polegający na odrzuceniu prawdziwej **hipotezy zerowej**	–
Błąd II rodzaju	–	Błąd polegający na nieodrzuceniu fałszywej **hipotezy zerowej**	–
Estymator	*E*	Narzędzie matematyczne do oszacowania (estymacji) parametru statystycznego, np. **wariancji**, **wartości oczekiwanej**	Dla rozkładu normalnego estymatorem **wartości oczekiwanej** jest średnia arytmetyczna, a **estymatorem wariancji** – kwadrat odchylenia standardowego

Pojęcie	Oznaczenie	Definicja	Uwagi
Hipoteza zerowa	H_0	Twierdzenie zakładające brak efektu lub różnicy w badaniach, które testuje się w ramach testu statystycznego	Dla każdego testu statystycznego jest ściśle sformułowana
Hipoteza alternatywna	H_1	Twierdzenie przeciwstawne do **hipotezy zerowej**, zakładające istnienie efektu lub różnicy	Dla każdego testu statystycznego jest ściśle sformułowana
Poziom istotności	α	Prawdopodobieństwo popełnienia **błędu I rodzaju**	$\alpha = 1 - \beta$
Poziom ufności	β	Prawdopodobieństwo niepopełnienia **błędu I rodzaju**	$\beta = 1 - \alpha$
Funkcja (rozkład) gęstości prawdopodobieństwa (ang. ***P**robability **D**ensity **F**unction, PDF*)	$f(x)$	Funkcja opisująca, jak prawdopodobieństwo jest rozłożone w zbiorze ciągłym wartości **zmiennej losowej**; najważniejsze funkcje gęstości to: rozkład normalny (Gaussa), rozkład t-Studenta, rozkład χ^2 (chi-kwadrat), rozkład F (Fishera), rozkład Q	Pole pod wykresem funkcji gęstości prawdopodobieństwa w danym przedziale wartości $<x_1, x_2>$ jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia wartości z tego przedziału
Statystyka testowa		Liczba obliczona na podstawie próby statystycznej, używana w **testach statystycznych**, w celu weryfikacji hipotezy zerowej poprzez porównanie danych z próby do założeń wynikających z **hipotezy zerowej**	
Test statystyczny		Procedura pozwalająca ocenić, czy dane wystarczająco dowodzą niesłuszność **hipotezy zerowej** i zasadność przyjęcia **hipotezy alternatywnej**	
Wariancja	Var σ^2 V	Miara zmienności danych opisująca rozrzut wartości wokół **wartości oczekiwanej**	
Wartość oczekiwana	μ E	Prognozowana w długiej perspektywie wartość **zmiennej losowej** przy wielokrotnym powtórzeniu eksperymentu	

Pojęcie	Oznaczenie	Definicja	Uwagi
Zmienna losowa	*X* (zwyczajowo)	Zmienna (o wartościach dyskretnych lub ciągłych), która przyjmuje wartości na podstawie wyników losowych procesów lub zdarzeń	Wartość zmiennej losowej oznaczamy jako *x*
Zmienna zależna	*Y*	Zmienna zależna od innych zmiennych	

2.2. Podstawowe rozkłady statystyczne

2.2.1. Rozkład normalny

Rozkład normalny to jeden z podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa. Teoretycznie spełniony on jest dla nieskończenie dużej liczby pomiarów, w praktyce dla bardzo dużej ich liczby. Można go opisać wzorem (1):

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad , \tag{1}$$

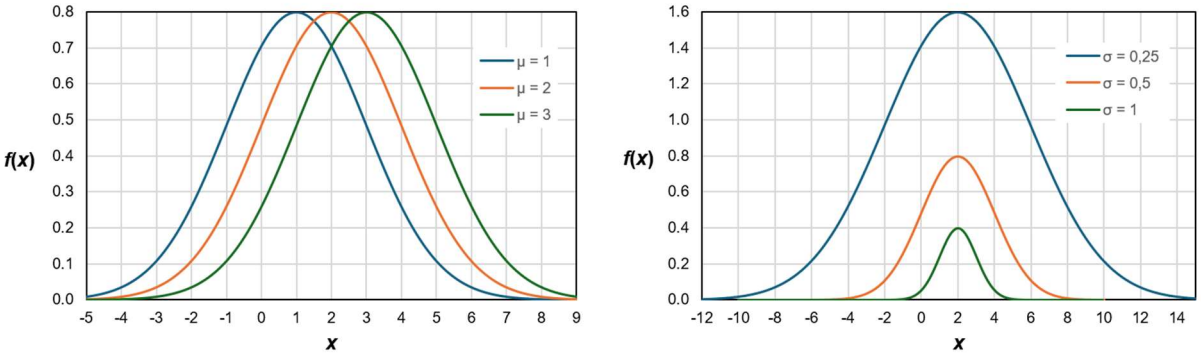
gdzie:

μ – wartość oczekiwana (estymowana przez **średnią arytmetyczną**);

σ – pierwiastek z wariancji (estymowany przez **odchylenie standardowe**).

Wzór (1) należy rozumieć jako funkcja **gęstości prawdopodobieństwa** wystąpienia wartości dla *x* przy konkretnych wartościach μ i σ.

Przykładowe rozkłady normalne przedstawiono na Rysunku 2.

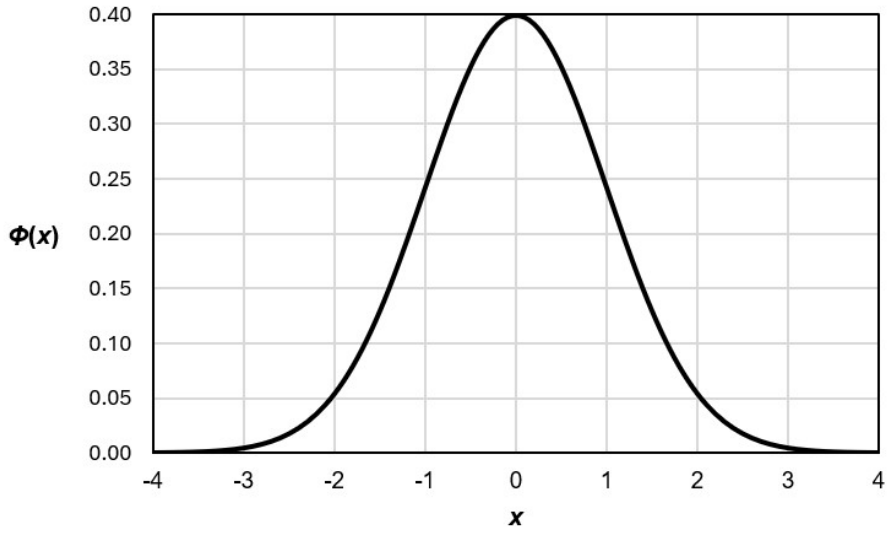


Rysunek 2. Porównanie przebiegu funkcji rozkładu normalnego dla różnych wartości μ i σ: po lewej dla $\sigma = 0{,}5$, po prawej dla $\mu = 2$

W praktyce wielkości mierzone miałyby różne μ i σ, co wymuszałoby obliczanie tego rozkładu dla każdej wielkości osobno. Dlatego też istnieje uniwersalny, tzw. **standardowy rozkład normalny** (oznaczany dla odróżnienia mała literą „fi"), w którym $\boldsymbol{\mu = 0}$ i $\boldsymbol{\sigma = 1}$, co w efekcie sprowadza się do wzoru (2):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} \tag{2}$$

Do opracowań statystycznych serię wartości (tzw. wartości zmiennej losowej) spełniających rozkład normalny przekształca się tak, aby stały się wartościami zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym. Wykres standardowego rozkładu normalnego przedstawiono na Rysunku 3. Należy zauważyć, że taki sam kształt krzywej zachowany jest również dla **niestandardowego rozkładu normalnego**.



Rysunek 3. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla standardowego rozkładu normalnego

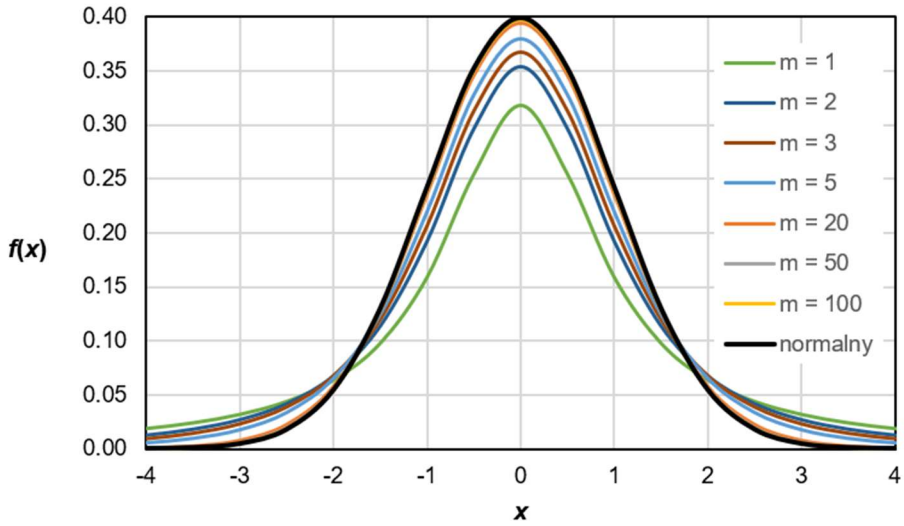
2.2.2. Rozkład t-Studenta

Rozkład t-Studenta to kolejny ważny rozkład wykorzystywany przy opracowywaniu wyników pomiarów. Stosuje się go zamiast rozkładu normalnego w przypadku małych prób i nieznanej wariancji populacji, głównie w testach dotyczących średniej. Rozkład t-Studenta zastępuje rozkład normalny, gdy:

- dysponujemy **małą próbą** (zwykle $n < 30$);
- badana zmienna ma **rozkład normalny lub zbliżony do normalnego**;
- **wariancja populacji jest nieznana** i musi być estymowana z próbki.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa w tym rozkładzie jest bardziej złożona niż w rozkładzie normalnym. Zależy ona nie tylko od wartości zmiennej, lecz także od **liczby stopni swobody *m***, którą w większości testów statystycznych przyjmuje się jako **liczbę pomiarów *n* pomniejszoną o 1**. Jak pokazuje Rysunek 4, kształt tego rozkładu jest podobny do rozkładu normalnego. Można zatem stwierdzić, że rozkład t-Studenta stanowi „poprawkę" rozkładu normalnego w przypadku małej liczby pomiarów w serii. Wynika to również z faktu, że im większa liczba stopni swobody (a więc i liczba pomiarów), tym rozkład t-Studenta bardziej pokrywa się ze standardowym rozkładem normalnym. Przykładowo, dla liczby stopni swobody $m = 25$ (26 pomiarów) względna różnica

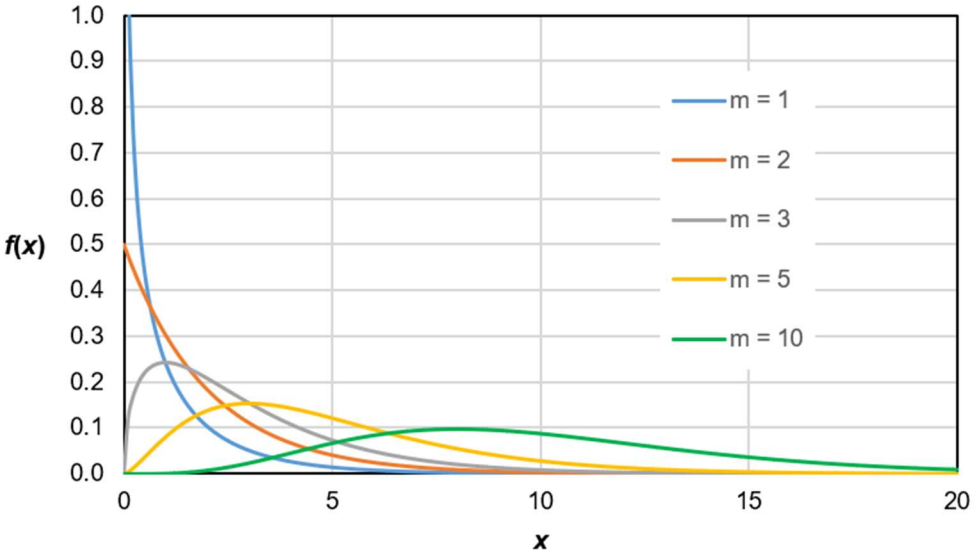
w maksimum ($x = 0$) między tymi rozkładami wynosi około 1%. Tablicę rozkładu t-Studenta stosowaną w praktyce zamieszczono w punkcie 9.3.



Rysunek 4. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu t-Studenta

2.2.3. Rozkład χ^2 (chi-kwadrat)

Rozkład χ^2 (chi-kwadrat) jest trzecim istotnym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa. W porównaniu do rozkładu t-Studenta wykazuje on kilka podobieństw, m.in. złożoność wzoru funkcji oraz zależność od liczby stopni swobody m (nie zawsze liczonej jako $n - 1$). Podstawową różnicą względem rozkładu normalnego i rozkładu t-Studenta jest niesymetryczność wykresu oraz ograniczenie do wartości zmiennej $x \geq 0$, co przedstawia Rysunek 5. Wynika to z faktu, iż rozkład χ^2 opiera się na kwadratach różnic i jest wykorzystywany tam, gdzie różnice te służą do weryfikacji zbieżności, np. wyników pomiarów między sobą lub zgodności modelu (równania) teoretycznego z danymi doświadczalnymi. Tablicę rozkładu χ^2 stosowaną w praktyce zamieszczono w punkcie 9.4.



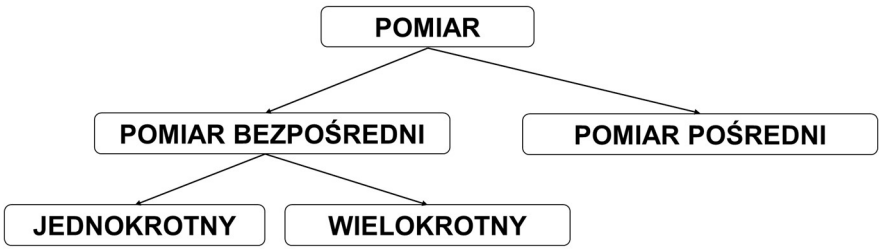
Rysunek 5. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa w rozkładzie χ^2 dla różnych stopni swobody *m*

3. SZACOWANIE WARTOŚCI WIELKOŚCI MIERZONEJ

3.1. Pojęcie terminu „pomiar”

Pojęcie pomiaru jest intuicyjne, ponieważ oznacza czynność mającą na celu wyznaczenie wartości wielkości mierzonej. Nauką zajmującą się pomiarami oraz ich aspektami teoretycznymi i praktycznymi jest **metrologia**.

Formalnie istnieją różne klasyfikacje pomiarów (Rysunek 6). Jedna z nich wyróżnia pomiary **bezpośrednie** i **pośrednie**. Pomiary **bezpośrednie** to takie, w których za pomocą przyrządu pomiarowego otrzymujemy bezpośrednio wartość mierzonej wielkości. Pomiary **pośrednie** to takie, w których za pomocą przyrządów pomiarowych otrzymujemy wartości wielkości, od których zależy docelowa, mierzona wielkość. Według drugiego kryterium możemy wyróżnić pomiary **jednokrotne** i **wielokrotne**, przy czym podział ten odnosi się przede wszystkim do pomiarów bezpośrednich. Przy pomiarach jednokrotnych wielkość mierzona jest jednokrotnie, co relatywnie nie jest miarodajne, ale czasami konieczne ze względu na ograniczenia czasowe, materiałowe, finansowe itp. Dokładność pomiaru jednokrotnego można oszacować na podstawie dokładności przyrządu pomiarowego. Pomiary wielokrotne, w których wielkość mierzona jest co najmniej dwukrotnie, są zdecydowanie bardziej miarodajne, ponieważ mamy wówczas do czynienia z **serią pomiarową**.



Rysunek 6. Rodzaje pomiarów

3.2. Wartości wielkości mierzonej – pomiar wielokrotny

3.2.1. Wstęp

W przypadku serii pomiarowej wartość wielkości mierzonej należy oszacować (w języku statystyki – estymować). Można w tym celu posłużyć się **średnią** lub **medianą**, a w przypadku średniej – średnią **arytmetyczną, ważoną, geometryczną** lub **harmoniczną**.

3.2.2. Mediana

Mediana to środkowa wartość serii pomiarowej. W przypadku nieparzystej liczby pomiarów w serii jest ona równa wartości środkowej odpowiadającej pomiarowi numer $\frac{n+1}{2}$ w ciągu niemalejącym utworzonym z serii n pomiarów. W przypadku parzystej liczy pomiarów medianę wyznacza się zazwyczaj jako średnią (arytmetyczną) dwóch środkowych wyrazów, tj. odpowiadających pomiarom o numerach $\frac{n}{2}$ oraz $\frac{n}{2}+1$. Mediana jako estymator wielkości w pomiarach fizycznych praktycznie nie jest stosowana.

Przykład P3.2.1.

W laboratorium farmaceutycznym zmierzono zawartość substancji czynnej (w mg) w losowo wybranych 12 tabletkach danego leku. Uzyskano następujące wyniki:

98 101 102 99 97 100 103 99 98 105 130 96.

Wiadomo, że zawartość leku nie ma rozkładu normalnego. Wyznaczyć medianę zawartości substancji czynnej w badanych tabletkach.

Rozwiązanie:

1. Dane porządkujemy niemalejąco:

96 97 98 98 99 99 100 101 102 103 105, 130.

2. Liczba danych wynosi 12 (jest parzysta), więc mediana jest średnią z dwóch środkowych wartości: 6 i 7.

$$\text{Mediana} = \frac{99 + 100}{2} = 99{,}5 \text{ mg}$$

3.2.3. Średnia arytmetyczna

Najczęstszym sposobem wyznaczania wartości reprezentatywnej dla serii pomiarowej jest **średnia arytmetyczna**, obliczana według wzoru (3) jako suma wszystkich wartości podzielona przez ich liczbę:

(3) $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ,$$

gdzie:

x_i – *i*-ta (kolejna) wartość w serii pomiarowej;

n – liczba pomiarów.

Należy zaznaczyć, że mimo swojej powszechności średnia arytmetyczna formalnie może być stosowana jedynie dla serii pomiarów spełniających rozkład normalny oraz takich, w których niepewność typu B (→ patrz punkt 5.3) **jest jednakowa dla każdego pomiaru (może być równa 0)**. Warunek ten jest jednak często pomijany ze względu na pomijalny wpływ niepewności typu B.

Przykład P3.2.2.

Dla pewnej substancji chemicznej zmierzono wartości stężenia (w $mg \cdot l^{-1}$) w serii 10 niezależnych pomiarów. Wiadomo, że stężenie tej substancji ma rozkład normalny. Wyniki pomiarów są następujące:

4,2 3,8 4,5 4,0 3,9 4,3 4,1 4,4 3,7 4,0.

Na podstawie tych danych wyznaczyć średnią arytmetyczną stężenia tej substancji.

Rozwiązanie:

$$\bar{x} = \frac{4{,}2 + 3{,}8 + 4{,}5 + 4{,}0 + 3{,}9 + 4{,}3 + 4{,}1 + 4{,}4 + 3{,}7 + 4{,}0}{10} = 4{,}19 \text{ mg} \cdot \text{l}^{-1}$$

3.2.4. Średnia ważona

W przypadku, gdy niepewność typu B nie jest jednakowa dla każdego pomiaru w serii, można zastosować **średnią ważoną**, obliczaną według wzoru (4):

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad (4)$$

W równaniu (4) w_i oznacza wagę i-tego pomiaru, którą można obliczyć ze wzoru (5):

$$w_i = \frac{1}{[u(x_i)]^2} \qquad (5)$$

,

gdzie:

$u(x_i)$ – niepewność i-tego pomiaru (→ pojęcie niepewności pomiarowej omówiono w rozdziale 5).

Jak wynika z powyższej zależności, **największą wagę uzyskuje pomiar o najmniejszej niepewności**.

Uwaga: Ponieważ niepewność typu B często jest pomijana, zazwyczaj obliczana jest średnia arytmetyczna.

Przykład P3.2.3.

Za pomocą pomiarów pośrednich wyznaczono stężenie pewnej substancji w próbce w trzech powtórzeniach. Po opracowaniu danych uzyskano następujące wartości stężeń oraz ich niepewności:

c [$g^{-1}ml^{-1}$]	495,4353	496,0052	495,6991
$u(c)$ [$g^{-1}\cdot ml^{-1}$]	24,08189	11,80709	7,561586

Należy wyznaczyć stężenie w tej próbce stosując średnią ważoną.

Rozwiązanie:

Dla każdej wartości obliczamy wagi, stosując wzór (5):

c [$g^{-1}ml^{-1}$]	495,4353	496,0052	495,6991
$u(c)$ [$g^{-1}\cdot ml^{-1}$]	24,08189	11,80709	7,561586
w_i [$ml^{-2}\cdot g^{-2}$]	0,001724324	0,00717322	0,01748937

Następnie, bazując na wzorze (4), obliczamy: iloczyny $c_i w_i$ i ich sumę oraz sumę wag w_i:

c [$g^{-1}ml^{-1}$]	495,4353	496,0052	495,6991	**SUMA**
$u(c)$ [$g^{-1}\cdot ml^{-1}$]	24,081889	11,80709	7,561586	–
w_i [$ml^{-2}\cdot g^{-2}$]	0,001724324	0,00717322	0,01748937	0,026387
$c_i w_i$ [$ml^{-1}\cdot g^{-1}$]	0,8542910	3,557955	8,669466	13,08171

Końcowym etapem jest obliczenie ilorazu ze wzoru (4):

$$\bar{c}_w = \frac{13{,}08171171\ \mathrm{ml}\cdot \mathrm{g}^{-1}}{0{,}026387\ \mathrm{ml}^2\cdot \mathrm{g}^{-2}} = 495{,}7635\ \mathrm{g}\cdot \mathrm{ml}^{-1}$$

Dla porównania można przytoczyć obliczoną średnią arytmetyczną stężenia:

$$\bar{c} = 495{,}8522\ \mathrm{g}\cdot \mathrm{ml}^{-1}$$

Uzyskane wartości $\bar{c}_w$ i $\bar{c}$ są bardzo zbliżone do siebie, ze względu na relatywnie małą niepewność $u(c)$ dla każdej wartości c.

Ważne: W przykładzie P3.2.3, jak i w innych przykładach rachunkowych w niniejszym skrypcie, wartości końcowe obliczeń w celu ułatwienia zrozumienia zachodzących działań zostały podane z bardzo dużą dokładnością. Należy jednak pamiętać, że na końcowym etapie każdy wynik powinien być zaokrąglony zgodnie z przyjętymi regułami, które w niniejszym skrypcie zostały szczegółowo omówione w Rozdziale 6.

3.2.5. Średnia geometryczna

Średnia geometryczna jest stosowana w fizyce bardzo rzadko i tylko dla dodatnich wartości. Można ją obliczyć ze wzoru (6):

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{6}$$

3.2.6. Średnia harmoniczna

Średnia harmoniczna służy do uśredniania wartości odwrotnie proporcjonalnych do zmiennej głównej. Można ją obliczyć ze wzoru (6):

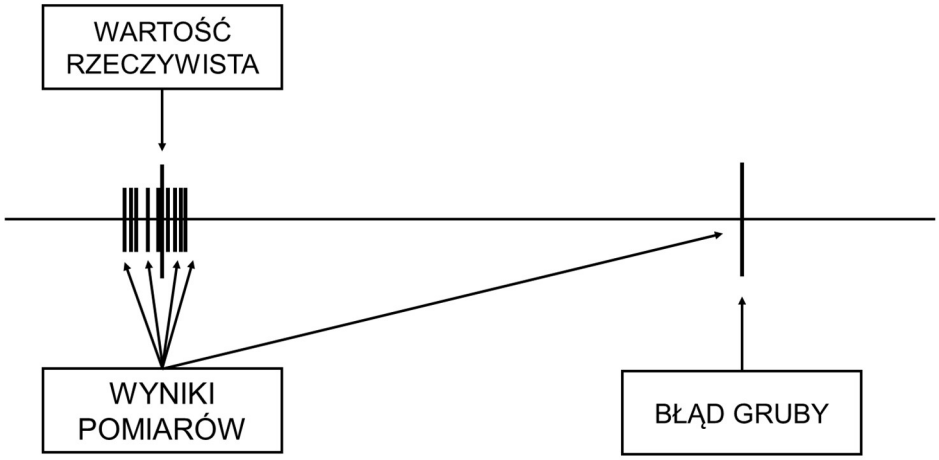
$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \tag{7}$$

W fizyce wykorzystuje się ją w przypadku obliczania prędkości średniej zmieniającej się na równych odcinkach przebytej drogi.

3.3. Wykrywanie błędu grubego – test Q-Dixona

W serii pomiarowej jeden z otrzymanych wyników może znacznie odbiegać od pozostałych, czyli stanowić tzw. błąd gruby (Rysunek 7). W takim przypadku należy taki wynik odrzucić, ponieważ mógłby on istotnie zniekształcić oszacowanie (fałszować estymatę) wartości rzeczywistej wynikającej z serii, np. średnią arytmetyczną. Choć często podchodzi się do tego nieprawidłowo, intuicyjnie odrzucając wartości odstające, poprawne wykrywanie i odrzucanie

błędów grubych z serii pomiarowej wymaga zastosowania odpowiedniego testu statystycznego.



Rysunek 7. Błąd gruby w pomiarach

Do wykrywania błędów grubych w serii pomiarowej służy m.in. test **Q-Dixona**. Test ten przeprowadza się następująco:

1) Mając ***n*** pomiarów szeregujemy je w ciąg **niemalejący**.
2) Obliczamy rozstęp ***R*** według wzoru (8):

(8) $$R = x_n - x_1 \quad ,$$

gdzie:

x_1, x_n – odpowiednio pierwszy i ostatni wyraz niemalejącego ciągu utworzonego w punkcie 1.

3) Obliczamy parametry $\boldsymbol{Q_1}$ i $\boldsymbol{Q_n}$ według wzorów (9) i (10):

(9) $$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{R}$$

(10) $$Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{R}$$

4) Porównujemy wartości $\boldsymbol{Q_1}$ i $\boldsymbol{Q_n}$ z wartością krytyczną $\boldsymbol{Q_{kr}}$ (z tablicy rozkładu Q-Dixona dla *n*-pomiarów – punkt 9.2 w niniejszym skrypcie):

   $\boldsymbol{Q_1} > \boldsymbol{Q_{kr}} \rightarrow$ odrzucamy pomiar 1 (jest to błąd gruby);

   $\boldsymbol{Q_n} > \boldsymbol{Q_{kr}} \rightarrow$ odrzucamy pomiar *n* (jest to błąd gruby).

5) W efekcie otrzymujemy nowy ciąg niemalejący, który wciąż może zawierać błędy grube. Należy zauważyć, że test Q-Dixona służy do weryfikacji wartości skrajnych. Jeżeli w punkcie 4 wykryto co najmniej jeden błąd gruby, to dla nowo otrzymanego ciągu niemalejącego powtarzamy czynności od punktu 2 do momentu, gdy żaden z parametrów $\boldsymbol{Q_1}$ **lub** $\boldsymbol{Q_n}$ **nie będzie większy** od wartości krytycznej $\boldsymbol{Q_{kr}}$. Należy przy tym pamiętać, że wartość $\boldsymbol{Q_{kr}}$ zmienia się wraz ze zmianą liczby wyrazów ciągu.

Przykład P3.3.1

Dane są wyniki pomiarów stężenia bilirubiny we krwi pacjenta [mg·dl^{-1}]:

1,18 1,24 1,09 1,31 0,86 1,26 1,08 1,11 1,38 1,17

Za pomocą testu Q-Dixona należy wykryć wśród nich błędy grube (z prawdopodobieństwem 95%).

Rozwiązanie:

1) Szeregujemy pomiary w ciąg niemalejący:

   0,86 1,08 1,09 1,11 1,17 1,18 1,24 1,26 1,31 1,38

2) Obliczamy rozstęp dla liczby pomiarów $n = 10$:

$$R_{10} = x_n - x_1 = 1{,}38 - 0{,}86 = 0{,}52$$

3) Obliczamy parametry Q_1 *i* Q_n:

$$Q_1 = \frac{1{,}08 - 0{,}86}{0{,}52} = 0{,}4231$$

$$Q_n = \frac{1{,}38 - 1{,}31}{0{,}52} = 0{,}1346$$

4) Porównujemy obliczone parametry Q z wartością krytyczną z tablic:

Dla $n = 10$ i $\beta = 95\%$ $Q_{kryt} = 0{,}412$

Zatem:

$Q_1 > Q_{kryt}$ → pomiar pierwszy to błąd gruby

$Q_n < Q_{kryt}$ → pomiar ostatni nie jest błędem grubym

5) Ponieważ jeden z pomiarów został odrzucony, weryfikujemy nowo powstały ciąg:

~~0,86~~ 1,08 1,09 1,11 1,17 1,18 1,24 1,26 1,31 1,38

6) Obliczamy rozstęp dla liczby pomiarów $n = 9$:

$$R_9 = x_n - x_1 = 1{,}38 - 1{,}08 = 0{,}3 \text{ mg} \cdot \text{dl}^{-1}$$

7) Obliczamy parametry Q_1 *i* Q_n:

$$Q_1 = \frac{1{,}09 - 1{,}08}{0{,}3} = 0{,}0333$$

$$Q_n = \frac{1{,}38 - 1{,}31}{0{,}3} = 0{,}2333$$

8) Porównujemy obliczone parametry Q z wartością krytyczną z tablic:

dla $n = 9$ i $\beta = 95\%$ $Q_{kryt} = 0{,}437$

Zatem:

$Q_1 < Q_{kryt}$ → pomiar drugi nie jest błędem grubym;

$Q_n < Q_{kryt}$ → pomiar ostatni nie jest błędem grubym.

9) W drugim etapie ($n = 9$) nie wykryto błędów grubych, zatem w punkcie 5) przedstawiona jest seria pomiarowa pozbawiona błędów grubych.

4. JAKOŚĆ WYNIKU POMIAROWEGO

4.1. Wprowadzenie

Należy pamiętać, że w metrologii wynik nie jest tylko liczbą. Jeśli nie znamy jego jakości (np. niepewności), nie wiemy, czy możemy go porównywać lub użyć do kontroli jakości, certyfikacji, kalibracji czy badań naukowych. Dlatego, dysponując serią pomiarową, często ocenia się jakość wykonanych pomiarów – zarówno względem siebie, jak i w odniesieniu do wartości odniesienia (referencyjnej, wzorcowej). Dokonuje się tego poprzez określenie **precyzji** i **poprawności**, które razem składają się na **dokładność** pomiarów.

4.2. Precyzja

Precyzję można zdefiniować jako bliskość zgodności pomiędzy wskazaniami lub wartościami wielkości zmierzonymi w powtarzanych pomiarach tego samego lub podobnych obiektów w określonych warunkach. Precyzja jest cechą ilościową (liczbową) i związana jest z błędem przypadkowym. Precyzję można określić, obliczając **współczynnik zmienności *CV*** (ang. ***c****oefficient of* ***v****ariation*) wyrażony wzorem (11):

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\ \% \qquad (11)$$

gdzie:

s – odchylenie standardowe próbki;

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna z pomiarów.

We wzorze (11) odchylenie standardowe próbki określone jest zależnością (12):

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad , \tag{12}$$

gdzie:

n – liczba pomiarów w serii.

4.3. Poprawność

Poprawność to bliskość zgodności pomiędzy średnią z nieskończonej liczby powtórzonych pomiarów wartości wielkości mierzonej a wartością wielkości odniesienia. Poprawność jest cechą jakościową odnoszącą się do wartości referencyjnej, a tym samym związaną z błędem **systematycznym**. Mimo, że jest to cecha jakościowa, można ją ocenić na podstawie parametru *A* (ang. ***a**ccuracy*) definiowanego według wzoru (13):

$$A = \frac{\left|x_{exp} - x_{ref}\right|}{x_{ref}} \cdot 100\ \% \quad , \tag{13}$$

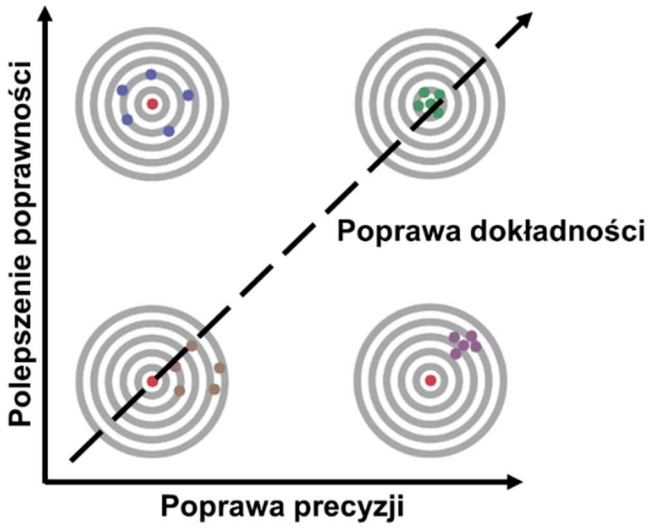
gdzie:

x_{exp} – wartość otrzymana doświadczalnie;

x_{ref} – wartość odniesienia (referencyjna).

4.4. Dokładność

Dokładność definiowana jest jako bliskość zgodności pomiędzy zmierzoną a prawdziwą wartością wielkości mierzonej. Dokładność, podobnie jak poprawność, jest cechą jakościową i zależy zarówno od **poprawności**, jak i od **precyzji** (Rysunek 8). Należy zwrócić uwagę, że pomiar jest bardziej dokładny, gdy obarczony jest mniejszym błędem pomiarowym (przypadkowym i/lub systematycznym).



Rysunek 8. Precyzja, poprawność i dokładność pomiaru. Kropki na tarczach symbolizują wartości pomiarowe

W celu oceny dokładności pomiaru można posłużyć się wyznaczeniem wskaźnika *F* ze wzoru (14), wykorzystującego wartości *CV* oraz *A*:

$$F = \sqrt{CV^2 + A^2} \tag{14}$$

Im mniejsza wartość parametru *F*, tym wyniki pomiarów są dokładniejsze.

Uwaga: Mimo, że powyższa charakterystyka poprawności i dokładności jest zgodna z przewodnikiem *Terminology in Analytical Measurement: Introduction to VIM 3* wydanego przez europejską organizację ds. chemii analitycznej EURACHEM)**, przy badaniu jakości pomiarów przyjęło się powszechnie, że *dokładność* jest tożsama z formalną poprawnością, a pojęcia *poprawność* jako takiego się nie używa.**

Przykład P4.2.1

Firma Bayer deklaruje, że jedna tabletka preparatu Aspirin C znawiera 400 mg kwasu acetylosalicylowego. Przedstawiono wyniki analizy zawartości tej substancji w 1 tabletce tej samej serii, uzyskane w czterech laboratoriach [mg]:

Laboratorium 1					**Laboratorium 2**				
403	406	393	398	401	404	402	399	403	405
Laboratorium 3					**Laboratorium 4**				
398	396	397	399	401	401	402	399	400	402

Należy wskazać laboratorium, które wykazało największą dokładność pomiarów (tj. precyzję i poprawność).

Rozwiązanie:

Przykładowe obliczenia wykonamy dla laboratorium nr 1. Precyzję należy obliczyć, wykorzystując wory (11), (13) i (14).

Numer pomiaru *i*	***m* [mg]**	$(m_i - \bar{m})^2$ **[mg²]**
1	403	$(403 - 400{,}2)^2 = 7{,}84$
2	406	$(406 - 400{,}2)^2 = 33{,}64$
3	393	$(393 - 400{,}2)^2 = 51{,}84$
4	398	$(398 - 400{,}2)^2 = 4{,}84$
5	401	$(401 - 400{,}2)^2 = 0{,}64$
	$\bar{m} = 400{,}2$ mg	$\sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{m})^2 = 98{,}8$

$$s = \sqrt{\frac{1}{(5-1)} \cdot 98{,}8} = 5{,}7388 \text{ mg}$$

$$CV = \frac{5{,}7388 \text{ mg}}{400{,}2 \text{ mg}} \cdot 100\ \% = 1{,}2418\ \%$$

Parametr *A* (wzór (13)) pomocny przy ocenie poprawności dla laboratorium nr 1 wynosi:

$$A = \frac{|400{,}2\ \text{mg} - 400\ \text{mg}|}{400\ \text{mg}} \cdot 100\ \% = 0{,}05\ \%$$

Parametr *F* dla laboratorium nr 1 przydatny przy ocenie dokładności wyliczony ze wzoru (14) wynosi:

$$F = \sqrt{(1{,}2418\ \%)^2 + (0{,}05\ \%)^2} = 1{,}2429\ \%$$

Postępując podobnie dla pozostałych laboratoriów otrzymuje się:

Laboratorium 2:	Laboratorium 3:	Laboratorium 4:
CV = 0,5718 %	*CV* = 0,4831 %	*CV* = 0,3253 %
A = 0,65 %	*A* = 0,45 %	*A* = 0,20 %
F = 0,8657 %	*F* = 0,6602 %	*F* = 0,3819 %

Porównując otrzymane wartości *CV* i *A* można wywnioskować, że najlepszą precyzją wykazało się laboratorium nr 4 (najmniejsza wartość *CV*), zaś najlepszą poprawnością – laboratorium nr 1 (najmniejsza wartość *A*). Biorąc pod uwagę precyzję i poprawność jednocześnie, najlepszą dokładność wykazało laboratorium nr 4.

5. NIEPEWNOŚĆ POMIAROWA

5.1. Wiadomości ogólne

Należy pamiętać, że **każdy pomiar obarczony jest błędem pomiarowym**. **Błąd pomiaru** definiuje się jako wartość bezwzględna różnicy między wartością zmierzoną a rzeczywistą. Choć mogłoby się wydawać, że określenie błędu jest wystarczające, w rzeczywistości pojęcie błędu pomiaru, w ścisłym tego słowa znaczeniu, nie posiada twardego fundamentu statystycznego, który jest szczególnie istotny w opracowaniu wyników pomiarów. Dokonując pomiaru nie mamy pewności, czy otrzymana wartość odpowiada wartości rzeczywistej (co więcej, prawdopodobieństwo takiej zgodności jest bliskie 0). Znacznie bardziej przydatne jest określenie przedziału liczbowego, w którym z określonym prawdopodobieństwem znajduje się rzeczywista wartość wielkości mierzonej. Aby wyznaczyć taki przedział, należy posłużyć się narzędziem opartym na statystyce, jakim jest **niepewność pomiarowa**. Jest to parametr charakteryzujący wynik pomiaru, przedstawiający rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Dla wielkości x oznacza się ją jako $u(x)$ (ang. ***u**ncertainty*), co podkreśla, że jest ona funkcją tej wielkości (zależy od jej wartości). Najważniejsze rodzaje niepewności to:

a) niepewność typu A;
b) niepewność typu B;
c) niepewność typu A i B;
d) niepewność złożona;

e) niepewność ważona;

f) niepewność rozszerzona;

g) niepewność względna;

h) niepewność graniczna.

5.2. Niepewność typu A

Niepewność typu A związana jest z rozrzutem serii *n* pomiarów wokół wartości średniej arytmetycznej, spowodowanym wystąpieniem tzw. błędu przypadkowego. Ponieważ dotyczy średniej arytmetycznej, przy jej wyznaczaniu zakłada się rozkład normalny wyników pomiarów oraz jednakową niepewność typu B dla wszystkich pomiarów serii. Niepewność typu A szacuje się poprzez odchylenie standardowe średniej, określone wzorem (15):

$$u_A(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \tag{15}$$

gdzie:

s – odchylenie standardowe z próby (patrz punkt 4.2).

Przykład P5.2.1.

Dana jest seria pomiarów stężenia bilirubiny [mg·dl^{-1}] (pozbawiona błędów grubych):

1,18 1,24 1,09 1,31 1,26 1,08 1,11 1,38 1,17

Wyznaczyć (oszacować) niepewność typu A dla średniej wartości stężenia bilirubiny.

Rozwiązanie:

Postępujemy podobnie, jak w przypadku obliczania *CV* ze wzoru (11), licząc najpierw średnią oraz sumę $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$:

Numer pomiaru *i*	***c* [mg·dl^{-1}]**	$(c_i - \bar{c})^2$ **[(mg·dl^{-1})^2]**
1	1,18	$(1{,}18 - 1{,}20222)^2 = 0{,}00049383$
2	1,24	$(1{,}24 - 1{,}20222)^2 = 0{,}00142716$
3	1,09	$(1{,}09 - 1{,}20222)^2 = 0{,}01259383$
4	1,31	$(1{,}31 - 1{,}20222)^2 = 0{,}01161605$
5	1,26	$(1{,}26 - 1{,}20222)^2 = 0{,}00333827$
6	1,08	$(1{,}08 - 1{,}20222)^2 = 0{,}01493827$
7	1,11	$(1{,}11 - 1{,}20222)^2 = 0{,}00850494$
8	1,38	$(1{,}38 - 1{,}20222)^2 = 0{,}03160494$
9	1,17	$(1{,}17 - 1{,}20222)^2 = 0{,}00103827$
	$\bar{c} = 1{,}20222$ mg	$\sum_{i=1}^{n}(c_i - c)^2 = 0{,}08555556$

$$u_A(\bar{c}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{9(9-1)} \cdot 0{,}08555556} = 0{,}344713 \text{ mg} \cdot \text{dl}^{-1}$$

5.3. Niepewność typu B

Niepewność typu B związana jest z błędem systematycznym, który wynika z:

a) dokładności i specyfikacji przyrządu mierniczego;

b) specyfikacji stosowanych wzorców;

c) błędu odczytu.

Pierwsze dwa czynniki wpływają na niepewność wzorcowania $\boldsymbol{u_{wz}(x)}$, zaś ostatni dotyczy niepewności eksperymentatora $\boldsymbol{u_e(x)}$. Sposób szacowania niepewności typu B jest często podawany przez producenta lub wyznaczany

eksperymentalnie. Niemniej jednak można ją wyznaczyć samodzielnie, stosując zależność (16):

$$u_B(x) = \sqrt{u_{wz}^2(x) + u_e^2(x)} = \sqrt{\frac{(\Delta_{wz}x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3}} \quad , \tag{16}$$

gdzie:

$\Delta_{wz}x$ – błąd wzorcowania;

$\Delta_e x$ – błąd eksperymentatora.

Ze wzoru (16) wynika, że niepewności wzorcowania i eksperymentatora oblicza się odpowiednio według wzorów (17) i (18):

$$u_{wz}(x) = \frac{\Delta_{wz}x}{\sqrt{3}} \tag{17}$$

$$u_e(x) = \frac{\Delta_e x}{\sqrt{3}} \tag{18}$$

We wzorach (17) i (18) w mianowniku występuje $\sqrt{3}$, który stosowany jest najczęściej w pomiarach fizycznych. W chemii odnosi się on do szkła miarowego klasy B, czyli nieco mniej dokładnego. Dla szkła klasy A (bardziej dokładnego) w mianowniku stosuje się wartość $\sqrt{6}$. Klasę szkła miarowego podaje producent. Biorąc pod uwagę przyrząd mierniczy, błąd wzorcowania i eksperymentatora wyznacza się w zależności od rodzaju tego przyrządu. Dla prostych mierników mechanicznych (np. linijka), $\Delta_{wz}x$ jest równe działce elementarnej, a $\Delta_e x$ jest pomijany. Dla mierników analogowych (obecnie rzadko używanych) istotna jest klasa przyrządu oraz zakres skali, co wpływa na błędy według wzorów (19) i (20). Klasę przyrządu podaje producent, a zakres skali pomiarowej odczytuje się bezpośrednio z urządzenia.

$$\Delta_{wz}x = \frac{klasa \cdot zakres}{100} \tag{19}$$

$$\Delta_e x = \frac{zakres}{liczba\ działek} \tag{20}$$

Dla mierników cyfrowych $\Delta_e x$ jest pomijany. Wartość $\Delta_{wz} x$ jest obliczana na podstawie zaleceń producenta, a bardzo często wynika ze wzoru (21):

$$\Delta x_{wz} = c_1 x + c_2 \cdot zakres \tag{21}$$

gdzie:

c_1, c_2 – stałe podane przez producenta;

x – wynik pomiaru.

Przykład P5.3.1.

Odmierzono objętość za pomocą dwóch pipet jednomiarowych o pojemności 25 ml: klasy A i klasy B. Dla klasy A tolerancja wynosi: ± 0,03 ml, natomiast dla klasy B: ± 0,06 ml. Wyznaczyć niepewność typu B objętości odmierzanej za pomocą obu pipet.

Rozwiązanie:

Pipeta klasy A:

$\Delta V_{wz} = 0{,}03$ ml

$u(V) = \frac{0{,}03 \text{ ml}}{\sqrt{6}} = 0{,}01225$ ml

Pipeta klasy B:

$\Delta V_{wz} = 0{,}06$ ml

$u(V) = \frac{0{,}06 \text{ ml}}{\sqrt{3}} = 0{,}03464$ ml

5.4. Niepewność składana typu A i B

W przypadku, gdy niepewności typu A oraz typu B występują jednocześnie (wówczas logiczny wydaje się być warunek równości niepewności B dla każdego pomiaru), możliwe jest dodanie tych niepewności. **Niepewności nie dodaje się bezpośrednio**, lecz stosuje się **prawo propagacji niepewności**, opisane wzorem (22), zgodnie z którym oblicza się pierwiastek z sumy kwadratów niepewności cząstkowych:

$$u_{AB}(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{u_A^2(x) + \frac{(\Delta_{wz} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3}} \tag{22}$$

Przykład P5.4.1.

Odchylenie standardowe średniej dla pomiarów masy tabletek pewnego leku wynosi $s_{\bar{m}}$ = 0,010772 g, a błąd wzorcowania wagi został oszacowany na Δm_{wz} = 0,002 g. Błąd eksperymentatora jest pomijalnie mały. Wyznaczyć niepewność składaną typu A i B.

Rozwiązanie:

Odchylenie standardowe średniej służy bezpośrednio do szacowania niepewności typu A.

Niepewność typu B związana z wagą wynosi:

$$u_{wz}(m) = \frac{0{,}002\ \mathrm{g}}{\sqrt{3}} = 0{,}0011547\ \mathrm{g}$$

Zakładamy, że niepewność typu B była jednakowa dla każdej tabletki, zatem można policzyć niepewność typu A i B:

$$u_{AB}(m) = \sqrt{(0{,}010772\ \mathrm{g})^2 + (0{,}0011547\ \mathrm{g})^2} = 0{,}0108331\ \mathrm{g}$$

5.5. Niepewność złożona

Niepewność złożona dotyczy niepewności wielkości wyznaczanych pośrednio poprzez pomiar innych wielkości, tj. $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Taki przypadek występuje np. przy określaniu stężenia substancji, ponieważ rzadko kiedy można je wyznaczyć bezpośrednio – należy zmierzyć wielkość fizyczną zależną od stężenia. Niepewność złożona wymaga znajomości pochodnej funkcji zgodnie ze wzorem (23) lub (24):

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} \qquad (23)$$

(24) $$u(y) = \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right| u(x_i)$$

Pomiar pośredni wielkości (zależnych od innych wielkości) jest bardzo częsty, w związku z czym niepewność złożona jest jedną z najczęściej wyznaczanych niepewności. Jej szacowanie jest zalecane i szczegółowo opisane w przewodniku *Ewaluacja danych pomiarowych: Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru* (JCGM 100:2008, GUM 1995 – wersja poprawiona). Najczęściej stosuje się wzór (23), ponieważ niepewność z niego uzyskana nie jest przeszacowana. Wzór (24) stosowany jest rzadziej i ma zastosowanie w przypadku pomiarów złożonych, w których dominuje niepewność typu B lub w przypadku pomiarów wielokrotnych o małej liczbie pomiarów. Niepewność wyznaczona za pomocą tego wzoru jest zazwyczaj większa niż ta uzyskana ze wzoru (23).

Przykład P5.5.1.

W celu wyznaczenia liczby π zmierzono jednokrotnie średnicę i obwód walca za pomocą miary krawieckiej. Otrzymano odpowiednio wyniki: D = 7,9 cm, L = 25,2 cm. Oszacować niepewność złożoną tak wyznaczonej liczby π.

Rozwiązanie:

Liczbę π można wyznaczyć z geometrii koła/okręgu:

$$\pi = \frac{L}{D}$$

Zgodnie z powyższym, wartość π zależy matematycznie od dwóch zmiennych. Niepewność liczby π, w celu uproszczenia rachunków, można wyrazić wstępnie jako jej kwadrat:

$$u^2(\pi) = \left(\frac{\partial \pi}{\partial L}\right)^2 u^2(L) + \left(\frac{\partial \pi}{\partial D}\right)^2 u^2(D)$$

Obliczamy pochodne w powyższym równaniu:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{1}{D} \qquad \frac{\partial \pi}{\partial D} = -\frac{L}{D^2}$$

Obliczone pochodne podstawiamy do wzoru na niepewność:

$$u^2(\pi) = \left(\frac{1}{D}\right)^2 u^2(L) + \left(-\frac{L}{D^2}\right)^2 u^2(D)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$u^2(\pi) = \frac{1}{D^2}\left[u^2(L) + \left(\frac{L}{D}\right)^2 u^2(D)\right]$$

Ostatecznie więc wzór na niepewność ma postać:

$$u(\pi) = \frac{1}{D}\sqrt{u^2(L) + \left(\frac{L}{D}\right)^2 u^2(D)}$$

Wartości D i L mamy podane bezpośrednio. Ponieważ wykonano pomiar jednokrotny, niepewności $u(L)$ i $u(D)$ będą wynikały jedynie z niepewności typu B. Dla pomiaru średnicy i obwodu za pomocą miarki krawieckiej błąd wzorcowania jest taki sam:

$$\Delta_{wz}L = \Delta_{wz}D = 0{,}1 \text{ cm}$$

Ponieważ pomiar mógł być niewygodny (trudny do wykonania), możemy przyjąć także niezerowy błąd eksperymentatora:

$$\Delta_e L = \Delta_e D = 0{,}1\ cm$$

Wiedząc, że:

$$u_B(L) = u_B(D) = \sqrt{\frac{(\Delta_w L)^2}{3} + \frac{(\Delta_e L)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta_w D)^2}{3} + \frac{(\Delta_e D)^2}{3}} = 0{,}08165 \text{ cm}$$

i podstawiając odpowiednie wartości do zależności na $u(\pi)$, otrzymujemy:

$$u(\pi) = \frac{1}{D}\sqrt{u^2(L) + \left(\frac{L}{D}\right)^2 u^2(D)} = 0{,}03275 \text{ cm}$$

Przykład P5.5.2.

Dla danych z przykładu P5.5.1. wyznaczyć niepewność złożoną liczby π korzystając ze wzoru (24).

Rozwiązanie:

Wyrażenie na niepewność wyprowadzone na podstawie wzoru (24) przyjmuje ostatecznie postać:

$$u(\pi) = \left|\frac{1}{D}\right| u(L) + \left|-\frac{L}{D^2}\right| u(D) = \frac{1}{D}u(L) + \frac{L}{D^2}u(D)$$

Podstawiając dane z przykładu P5.5.2 uzyskujemy:

$$u(\pi) = 0{,}072379$$

Przykład P5.5.3.

Stężenie substancji w roztworze, w przypadku liniowej krzywej wzorcowej, opisane jest wzorem:

$$c = \frac{f(c) - b}{a},$$

gdzie:

$f(c)$ – wartość wielkości zależnej liniowo od stężenia substancji;

a – współczynnik kierunkowy liniowej krzywej wzorcowej;

b – wyraz wolny krzywej wzorcowej.

Niepewność wyznaczanego stężenia substancji w celu uproszczenia rachunków można wyrazić wstępnie jako jej kwadrat:

$$u^2(c) = \left(\frac{\partial c}{\partial f}\right)^2 u^2(f) + \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 u^2(a) + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 u^2(b)$$

Obliczamy pochodne w powyższym równaniu:

$$\frac{\partial c}{\partial f} = \frac{1}{a} \qquad \frac{\partial c}{\partial a} = \frac{b-f}{a^2} \qquad \frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{1}{a^2}$$

Obliczone pochodne podstawiamy do wzoru na niepewność:

$$u^2(c) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 u^2(f) + \left(\frac{b-f}{a^2}\right)^2 u^2(a) + \left(-\frac{1}{a}\right)^2 u^2(b)$$

Po odpowiednim przekształceniu i pierwiastkowaniu otrzymujemy ostatecznie:

$$u(c) = \sqrt{\frac{u^2(f)}{a^2} + \left(\frac{b-f}{a}\right)^2 u^2(a) + \frac{u^2(b)}{a^2}}$$

Przykład P5.5.4.

Stała szybkości eliminacji substancji czynnej z organizmu K_{el} dana jest wzorem:

$$K_{el} = \frac{lnC_1 - lnC_2}{t_2 - t_1}$$

gdzie:

C_1 – stężenie substancji czynnej w płynie tkankowym po czasie t_1 od podania leku;

C_2 – stężenie substancji czynnej w płynie tkankowym po czasie t_2 od podania leku ($t_2 > t_1$).

Niepewność stałej szybkości eliminacji K_{el} w celu uproszczenia rachunków można wyrazić wstępnie jako jej kwadrat:

$$u^2(K_{el}) = \left(\frac{\partial K_{el}}{\partial C_1}\right)^2 u^2(C_1) + \left(\frac{\partial K_{el}}{\partial C_2}\right)^2 u^2(C_2) + \left(\frac{\partial K_{el}}{\partial t_1}\right)^2 u^2(t_1) + \left(\frac{\partial K_{el}}{\partial t_2}\right)^2 u^2(t_2)$$

Obliczamy pochodne w powyższym równaniu:

$$\frac{\partial K_{el}}{\partial C_1} = \frac{1}{(t_2 - t_1)}\frac{1}{C_1} \qquad \frac{\partial K_{el}}{\partial C_2} = -\frac{1}{(t_2 - t_1)}\frac{1}{C_2}$$

$$\frac{\partial K_{el}}{\partial t_1} = \frac{lnC_1 - lnC_2}{(t_2 - t_1)^2} \qquad \frac{\partial K_{el}}{\partial t_2} = -\frac{lnC_1 - lnC_2}{(t_2 - t_1)^2}$$

Obliczone pochodne podstawiamy do wzoru na niepewność:

$$u^2(K_{el}) = \left(\frac{1}{(t_2 - t_1)}\frac{1}{C_1}\right)^2 u^2(C_1) + \left(-\frac{1}{(t_2 - t_1)}\frac{1}{C_2}\right)^2 u^2(C_2) + \\ + \left(\frac{lnC_1 - lnC_2}{(t_2 - t_1)^2}\right)^2 u^2(t_1) + \left(-\frac{lnC_1 - lnC_2}{(t_2 - t_1)^2}\right)^2 u^2(t_2)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$u^2\,(K_{el}) = \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \cdot \\ \cdot \left[\left(\frac{1}{C_1}\right)^2 u^2(C_1) + \left(\frac{1}{C_2}\right)^2 u^2(C_2) + \left(\frac{lnC_1 - lnC_2}{t_2 - t_1}\right)^2 u^2(t_1) + \left(\frac{lnC_1 - lnC_2}{t_2 - t_1}\right)^2 u^2(t_2)\right]$$

Ostatecznie więc wzór na niepewność K_{el} ma postać:

$$u(K_{el}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \\ \cdot \sqrt{\left[\left(\frac{1}{C_1}\right)^2 u^2(C_1) + \left(\frac{1}{C_2}\right)^2 u^2(C_2) + \left(\frac{lnC_1 - lnC_2}{t_2 - t_1}\right)^2 u^2(t_1) + \left(\frac{lnC_1 - lnC_2}{t_2 - t_1}\right)^2 u^2(t_2)\right]}$$

5.6. Niepewność ważona

Jeżeli mamy do czynienia ze średnią ważoną jako estymatą dla serii pomiarowej, wówczas niepewność takiej średniej powinna być obliczona jako niepewność ważona, dana wzorem (25) lub (26). Matematycznie jest to przypadek niepewności złożonej, przy założeniu, że same wagi nie posiadają niepewności.

(25) $$u(\bar{x}_w) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

(26) $$u(\bar{x}_w) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{w_i}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Wzór (26) jest uzasadniony w tych przypadkach, gdy wagi w_i zostały obliczone na podstawie niepewności pomiarowej oszacowanej dla małej liczby pomiarów.

Przykład P5.6.1

Jako przykład obliczania niepewności ważonej przytoczymy dane z przykładu P3.2.3:

$u(c)$ [g·ml^{-1}]	24,081889	11,807091	7,561586	**SUMA**
w_i [ml^2·g^{-2}]	0,001724324	0,00717322	0,017489372	0,026387

Bazując na danych powyżej można obliczyć niepewność ważoną ze wzoru (25):

$$u(\bar{x}_w) = \frac{1}{\sqrt{0{,}026387}} = 6{,}1560904 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Do oszacowania niepewności ważonej ze wzoru (26) należy obliczyć odwrotność niepewności lub pierwiastek z wagi:

$u(c)$ [g·ml^{-1}]	24,081889	11,807091	7,561586	**SUMA**
w_i [ml^2·g^{-2}]	0,001724324	0,00717322	0,017489372	0,026387
$\frac{1}{u(x_i)} = \sqrt{w_i}$ [ml · g^{-1}]	0,041524982	0,084694867	0,132247388	0,132247388

Ostatecznie podstawiamy do wzoru (26):

$$u(\bar{c}_w) = \frac{0{,}132247388}{0{,}026387} = 5{,}01184\ \mathrm{g \cdot ml^{-1}}$$

5.7. Niepewność rozszerzona

Niepewność rozszerzona $U(x)$ obliczana jest przez pomnożenie ostatecznie wyznaczonej niepewności $u(x)$ przez **współczynnik rozszerzenia *k***, według równania (27):

$$U(x) = k \cdot u(x) \tag{27}$$

Współczynnik k można wyznaczyć na dwa sposoby. W pierwszym przypadku współczynnik rozszerzenia k wyznacza się z rozkładu t-Studenta dla wybranego poziomu ufności (najczęściej $\beta = 0{,}95$) oraz liczby stopni swobody $m = n - 1$. Metoda ta jest szczególnie uzasadniona w przypadku „rozszerzania" niepewności typu A. Drugi sposób polega na przyjęciu wartości umownej, która najczęściej mieści się w przedziale od 2 do 3, przy czym zazwyczaj przyjmuje się wartość 2.

Przykład P5.7.1

Odchylenie standardowe średniej dla serii 9 pomiarów stężenia paracetamolu w syropie wynosi: $s_{\bar{x}} = 2{,}9757\ \mathrm{mg \cdot ml^{-1}}$. Wyznaczyć niepewność rozszerzoną stężenia paracetamolu.

Rozwiązanie:

Skoro liczba pomiarów n jest równa 9, to liczba stopni swobody w rozkładzie t-Studenta jest równa $m = 9 - 1 = 8$. Z tablic rozkładu t-Studenta można odczytać, że dla $m = 8$ i prawdopodobieństwa 95% $k = 2{,}306$. Wobec tego niepewność rozszerzona jest równa:

$$U(m) = 2{,}306 \cdot 2{,}9757\ \mathrm{mg \cdot ml^{-1}} = 6{,}86196\ \mathrm{mg \cdot ml^{-1}}$$

5.8. Niepewność względna

Niepewność względna to niepewność wartości wielkości mierzonej odniesiona do tej wartości. Najczęściej wyraża się ją w procentach: dla niepewności standardowej (nierozszerzonej) zgodnie ze wzorem (28), natomiast dla niepewności rozszerzonej – zgodnie ze wzorem (29):

(28) $$u_{wzgl}(x) = \frac{u(x)}{x} \cdot 100\%$$

(29) $$U_{wzgl}(x) = \frac{U(x)}{x} \cdot 100\%$$

Przykład P5.8.1.

Bazując na przykładzie P5.7.1, obliczyć niepewność względną stężenia paracetamolu w syropie.

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji niepewności względnej, pamiętając jednak, że ostateczna niepewność jest niepewnością rozszerzoną:

$$U_{wzgl}(m) = \frac{6{,}86196}{105{,}77778} \cdot 100\% = 6{,}4872\%$$

5.9. Inne sposoby szacowania niepewności dla serii pomiarowej

W przypadku serii pomiarowej, obejmującej małą liczbę pomiarów, dla której nie można założyć rozkładu normalnego ani wyznaczyć wag, wówczas można skorzystać z innych metod wyznaczenia niepewności. Według pierwszej z nich za niepewność przyjmuje się **połowę rozstępu** między najmniejszym a największym wynikiem, według wzoru (30):

(30) $$u(x) = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Przykład P5.9.1.

Wykonano 5-krotny pomiar odczynu Biernackiego (OB) u pacjenta. Uzyskano wyniki [mm·h^{-1}]: 15, 17, 16, 14, 15. Wyznaczyć niepewność pomiarów, wykorzystując rozstęp serii.

Rozwiązanie

Najmniejsza wartość to 15 mm·h^{-1}, a największa 17 mm·h^{-1}. Niepewność rozstępowa jest zatem równa:

$$u(OB) = \frac{17 - 14}{2} = 1{,}5 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$$

Według drugiej metody, zgodnie ze wzorem (31), niepewność można oszacować jako największą z różnic między średnią lub medianą a każdym wynikiem pomiarowym serii. Jest to tzw. **niepewność graniczna**:

$$u(x) = |x_i - \bar{x}|_{max} \tag{31}$$

Przykład P5.9.2.

Korzystając z pomiarów w przykładzie P5.9.1, wyznaczyć niepewność graniczną dla wykonanych pomiarów *OB*.

Rozwiązanie

Najpierw należy obliczyć średnią (względnie medianę) z pomiarów, a później wartość bezwzględną z różnicy między i-tym pomiarem, a tą średnią. Niepewność to największa wyznaczona wartość bezwzględna:

Numer pomiaru *i*	***OB* [mm·h^{-1}]**	**$\lvert OB_i - \overline{OB}\rvert$ [(mm·h^{-1})^2]**
1	15	$\lvert 15 - 15{,}4 \rvert = 0{,}4$
2	17	$\lvert 17 - 15{,}4 \rvert = 1{,}6$
3	16	$\lvert 16 - 15{,}4 \rvert = 0{,}6$
4	14	$\lvert 17 - 15{,}4 \rvert = 1{,}4$
5	15	$\lvert 15 - 15{,}4 \rvert = 0{,}4$
	$\overline{OB} = 15{,}4$ mm·h^{-1}	Wartość maksymalna: $\lvert OB_i - \overline{OB}\rvert_{max} = 1{,}6$ mm·h^{-1}

5.10. Niepewność pomiarowa w chemii

Określanie niepewności pomiarowych oznaczeń chemicznych substancji nie jest proste z uwagi na mnogość czynników wpływających na dane oznaczenie. Formalnie w takich przypadkach proces oznaczenia zawartości substancji w próbce należałoby zapisać jako wzór matematyczny, a następnie na jego podstawie wyznaczyć formułę pozwalającą na wyznaczenie wartości niepewności złożonej. W celu oszacowania niepewności w analizach chemicznych można jednak zastosować rachunek niepewności bazujący na niepewnościach względnych, który w przypadku iloczynowych lub ilorazowych relacji między czynnikami wpływających na wartość oznaczenia daje dokładnie ten sam wynik, co niepewność złożona. Taką niepewność można obliczyć ze wzoru (32):

$$u(y) = y \cdot u_w(y) = y \cdot \sqrt{\left[\frac{u(x_1)}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{u(x_2)}{x_2}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{u(x_n)}{x_n}\right]^2} \tag{32}$$

Zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem równe $u_w(y)$ to w rzeczywistości prawo propagacji zastosowane wobec niepewności względnych.

Przykład P5.10.1.

Sporządzano roztwór substancji w kolbie miarowej. W tym celu odważkę o masie 10 g rozpuszczono w rozpuszczalniku, używając kolby miarowej o pojemności 100 ml. Niepewność masy odważki wynosi 0,058 g, a niepewność objętości 0,082 ml. Wyznaczyć niepewność stężenia otrzymanego roztworu.

Rozwiązanie:

Wygodnie najpierw wyznaczyć z równania (32) wartość $u_w(y)$, gdzie w rozpatrywanym przypadku zmienną zależną *y* jest stężenie roztworu:

$$u_w(c) = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(V)}{V}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}058\ \text{g}}{10\ \text{g}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}082\ \text{ml}}{100\ \text{ml}}\right)^2} = 0{,}0058576$$

Należy przypomnieć, że brak jednostki wynika z faktu, iż jest to niepewność względna. Aby wyznaczyć ostateczną niepewność stężenia, należy pomnożyć niepewność względną przez wartość stężenia:

$$u(c) = c \cdot u_w(c) = 0{,}1\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{ml}^{-1} \cdot 0{,}0058576 = 0{,}00058576\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{ml}^{-1}$$

6. ZAOKRĄGLANIE

6.1. Przedstawianie wartości wielkości mierzonej

Jeżeli poprawnie chcemy przedstawić wartość mierzonej wielkości (pośrednio lub bezpośrednio) w wersji raportowej (sprawozdawczej, ostatecznej, do wiadomości, finalnej), musi ona spełniać schemat przedstawiony na Rysunku 9.



Rysunek 9. Przedstawianie wartości wielkości mierzonej

Należy również pamiętać, że wartość wielkości w wersji finalnej musi być **odpowiednio zaokrąglona**. Zaokrąglenie ma istotne znaczenie metrologiczne, ponieważ wpływa na **wiarygodność i poprawną interpretację wyniku pomiarów**. Należy mieć na uwadze, że **niedopuszczalne jest zaokrąglanie bezpośrednich wyników pomiarów**, czyli wskazań przyrządu pomiarowego. **Nie należy również zaokrąglać wyników obliczeń pośrednich**, a w przypadku konieczności, np. ich prezentacji, podaje się je z dużą dokładnością tak, aby zaokrąglanie wynikające ze skracania liczb nie wpływało na końcową wartość wielkości mierzonej.

Przyczyna konieczności zaokrąglania wyniku wynika głównie z ograniczeń przyrządu pomiarowego lub metody pomiarowej. Dla przykładu można rozważyć pomiar średnicy ludzkiego erytrocytu z wykorzystaniem mikroskopu optycznego. Podając jako ostateczny wynik: ***d* = 7,46547287275745354 µm** sugerujemy, że byliśmy w stanie zmierzyć średnicę z dokładnością większą niż rozmiar elektronu (rząd wielkości 10^{-15} µm), co jest absurdalne, ponieważ w mikroskopie optycznym jesteśmy w stanie dostrzec najmniejsze obiekty o rozmiarze rzędu wielkości 0,1 µm. Taki sam jest także rząd wielkości rozdzielczości mikroskopu optycznego, czyli najmniejszej odległości między dwoma rozróżnialnymi punktami. Wobec tego podana wyżej wartość średnicy jest uzasadniona tylko jako wynik obliczeń pośrednich lub wynik roboczy wymagający zaokrąglenia.

6.2. Cyfry znaczące

Cyfry znaczące to kolejne, sąsiadujące ze sobą cyfry danej liczby, przy czym pierwszą cyfrą znaczącą jest pierwsza cyfra niezerowa tej liczby. Należy zaznaczyć, że **pojęcie „cyfr znaczących" nie jest tożsame z pojęciem „cyfr po przecinku"**.

6.3. Zaokrąglanie wartości wielkości obarczonej niepewnością

Choć reguły zaokrąglania często ustalane są wewnętrznie, najlepiej sprawdzają się reguły następujące:

1) Najpierw zaokrąglamy niepewność do określonej liczby **cyfr znaczących w górę (jednej lub dwóch)**;
2) Wynik pomiaru zaokrąglamy do **tej samej liczby cyfr po przecinku, co zaokrąglona niepewność**, według klasycznej reguły zaokrąglania. W tym punkcie należy pamiętać, że:
   a) zaokrąglamy według wyznaczonej ostatecznej niepewności (tj. jeżeli została wyznaczona niepewność rozszerzona, to według niej);

b) nie zaokrąglamy według niepewności względnej (ma ona jedynie charakter informacyjny); uwaga: **niepewność względną** zaokrąglamy jak niepewność – **według reguły 1**.

Przykład P6.3.1.

Poniższe wartości zaokrąglić na dwa sposoby: do 1 cyfry znaczącej oraz do 2 cyfr znaczących.

	x	$u(x)$
a)	1,2736475	0,462471434
b)	0,56472654	0,036251847
c)	0,06763625	0,00183642
d)	12,3746426	3,472482955
e)	2736,347239	76,4753884
f)	5392,58375	573,47578
g)	74624,58724	944,7364
h)	$5{,}3746\cdot10^{5}$	$0{,}46272\cdot10^{5}$
i)	$3{,}47671\cdot10^{-10}$	$0{,}857264\cdot10^{-11}$
j)	$7{,}57368\cdot10^{-6}$	$7{,}57368\cdot10^{-8}$
k)	0,00004627467	0,0000005363724
l)	5779367,57224	185183,673757

Rozwiązanie:

Przykład	**Przed zaokrągleniem**		**Po zaokrągleniu**			
	Przed zaokrągleniem		**Do 1 cyfry znaczącej**		**Do 2 cyfr znaczących**	
	x	$u(x)$	x	$u(x)$	x	$u(x)$
a)	1,2736475	0,462471434	1,3	0,5	1,27	0,47
b)	0,56472654	0,036251847	0,56	0,04	0,565	0,037
c)	0,06763625	0,00183642	0,068	0,002	0,0676	0,0019
d)	12,3746426	3,472482955	12	4	12,4	3,5
e)	2736,347239	76,4753884	$2{,}74\cdot10^{3}$	$0{,}08\cdot10^{3}$	$2{,}736\cdot10^{3}$	$0{,}077\cdot10^{3}$
f)	5392,58375	573,47578	$5{,}4\cdot10^{3}$	$0{,}6\cdot10^{3}$	$5{,}39\cdot10^{3}$	$0{,}58\cdot10^{3}$
g)	74624,58724	944,7364	$7{,}5\cdot10^{4}$	$0{,}1\cdot10^{4}$	$7{,}462\cdot10^{4}$	$0{,}095\cdot10^{4}$
h)	$5{,}3746\cdot10^{5}$	$0{,}46272\cdot10^{5}$	$5{,}4\cdot10^{5}$	$0{,}5\cdot10^{5}$	$5{,}37\cdot10^{5}$	$0{,}47\cdot10^{5}$
i)	$3{,}47671\cdot10^{-10}$	$0{,}857264\cdot10^{-11}$	$3{,}48\cdot10^{-10}$	$0{,}09\cdot10^{-10}$	$3{,}477\cdot10^{-10}$	$0{,}086\cdot10^{-10}$

Przykład	Przed zaokrągleniem		Po zaokrągleniu			
	Przed zaokrągleniem		Do 1 cyfry znaczącej		Do 2 cyfr znaczących	
	x	$u(x)$	x	$u(x)$	x	$u(x)$
j)	$7{,}57368 \cdot 10^{-6}$	$7{,}57368 \cdot 10^{-8}$	$7{,}57 \cdot 10^{-6}$	$0{,}08 \cdot 10^{-6}$	$7{,}574 \cdot 10^{-6}$	$0{,}076 \cdot 10^{-6}$
k)	0,00004627467	0,0000005363724	$4{,}63 \cdot 10^{-5}$	$0{,}06 \cdot 10^{-5}$	$4{,}627 \cdot 10^{-5}$	$0{,}054 \cdot 10^{-5}$
l)	5779367,57224	185183,673757	$5{,}8 \cdot 10^{6}$	$0{,}2 \cdot 10^{6}$	$5{,}78 \cdot 10^{6}$	$0{,}19 \cdot 10^{6}$

W przykładach e), f), g), k) i l) należy najpierw zapisać wartość x w postaci wykładniczej (notacji naukowej) zachowując jej reguły, tj. liczba przed potęgą **liczby 10 musi się mieścić w przedziale (1, 10)**. Następnie wartość $u(x)$ należy zapisać z taką samą potęgą liczby 10. Jeżeli wartości x i $u(x)$ mają tę samą potęgę liczby 10, nie wpływa to na sposób zaokrąglania, ale ważne jest, aby nie pominąć jej w zapisie końcowym. Przykłady h) – j) są analogiczne do poprzednich, lecz nie wymagają zapisu wartości x w postaci wykładniczej, ponieważ została ona prawidłowo zastosowana. Wystarczy jedynie przed zaokrągleniem ujednolicić potęgi liczby 10 poprzez odpowiednie przekształcenie zapisu wartości $u(x)$. Należy zwrócić uwagę, że przykłady k) i l) w pierwotnym zapisie są nieprawidłowe ze względu na małą czytelność wynikającą z dużej liczby cyfr (zer), dlatego taki sposób zapisu nie powinien być stosowany.

6.4. Zapisywanie wartości wielkości obarczonej niepewnością

Zgodnie z Rysunkiem 9, w zapisie przedstawiającym wartości wielkości mierzonej należy uwzględnić niepewność **po zaokrągleniu**. Dopuszczone formy zapisu zależą od rodzaju niepewności. W celu ich omówienia posłużymy się przykładem: m = 1,25 g; $u(m)$ = 0,14 g.

Dla niepewności nierozszerzonej istnieją 3 metody zapisu:

1) Pełny zapis:

m = 1,25 g; $u(m)$ = 0,14 g

2) Zapis z pełną wartością niepewności w nawiasie:

m = 1,25(0,14) g

Zapis skrócony (w nawiasie zapisuje się tylko cyfry znaczące niepewności): m = 1,25(14) g

Najczęściej (o ile nie zawsze) stosowana jest **metoda nr 3** z racji jej najbardziej kompaktowej formy zapisu. Zauważmy, że przy poprawnym zaokrągleniu, zgodnym z regułami w rozdziale 6.3, **cyfry w nawiasie zajmują ostatnie miejsca liczby przed nawiasem**.

Dla niepewności rozszerzonej formalnie dopuszczalna jest tylko jedna postać zapisu, w której między wartością wielkości a niepewnością wprowadza się znak „±". Dla przykładu: m = 1,25 g; $U(m)$ = 0,28 g, zapis końcowy ma postać:

m = 1,25 g ± 0,28 g

lub

m = (1,25 ± 0,28) g

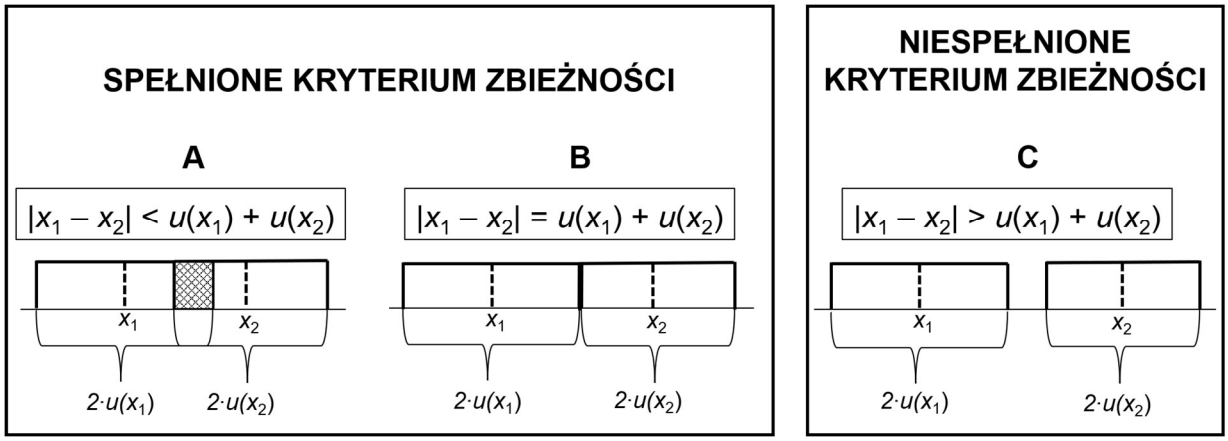
Uwaga: W różnych źródłach (np. w publikacjach naukowych) znak „±" jest często wykorzystywany do wyrażania niepewności nierozszerzonej. Należy jednak pamiętać, że formalnie jest to błąd i zapis ten powinien być stosowany tylko w przypadku niepewności rozszerzonej.

6.5. Kryterium zbieżności

Po zaokrągleniu wartości wielkości mierzonej, czyli wyznaczeniu wartości tzw. sprawozdawczej, często zachodzi potrzeba porównania jej z inną wartością, np. otrzymaną inną metodą lub wartością literaturową. Wówczas w celu zbadania zgodności takich dwóch takich wartości, z których co najmniej jedna ma znaną niepewność, można się posłużyć narzędziem, zwanym **kryterium zbieżności**, określonym nierównością (33):

$$|x_1 - x_2| \leq u(x_1) + u(x_2) \tag{33}$$

Zauważmy, że gdy nierówność (33) jest spełniona, wówczas mamy do czynienia z co najmniej jedną wartością wspólną dla dwóch przedziałów liczbowych wynikających z estymowanej wartości i jej niepewności, tj. $x \pm u(x)$ (Rysunek 10A i 10B). Jeżeli kryterium zbieżności nie jest spełnione, wówczas przedziały liczbowe są rozłączne (Rysunek 10C).



Rysunek 10. Przypadki spełnienia i niespełnienia kryterium zbieżności

Przykład P6.4.1

Wykonano pomiar stężenia bilirubiny we krwi pacjenta dwiema metodami. Otrzymano wartości: c_1 = 1,20(35) mg·dl^{-1} oraz c_2 = 1,80(20) mg·dl^{-1}. Zbadać zbieżność między obiema wartościami.

Rozwiązanie

Bazując na zapisie wartości wraz z niepewnością, można wywnioskować, że:

c_1 = 1,20 mg·dl^{-1}, $u(c_1)$ = 0,35 mg·dl^{-1},

c_2 = 1,80 mg·dl^{-1}, $u(c_2)$ = 0,20 mg·dl^{-1}.

Sprawdzając kryterium zbieżności (32), obliczamy lewą i prawą stronę nierówności (ponieważ jednostki są takie same, można je chwilowo pominąć):

L: |1,20 – 1,80| = 0,60,

P: 0,35 + 0,20 = 0,55.

Porównując lewą i prawą stronę:

0,60 > 0,55

stwierdzamy, że kryterium zbieżności **nie** jest spełnione. Wniosek można sformułować następująco: ***Wartości stężeń otrzymane obiema metodami nie są zbieżne (w granicach swoich niepewności).***

Komentarz: Jedna z metod jest prawdopodobnie nieodpowiednia do oznaczenia stężenia bilirubiny we krwi.

Przykład P6.4.2

Wyznaczona doświadczalnie wartość liczby π wynosi 3,190(62). Wartość tablicowa tej liczby (z dokładnością do 5 cyfr po przecinku) wynosi 3,14159. Zbadać zbieżność między wartością doświadczalną a tablicową.

Rozwiązanie

Bazując na zapisie można wywnioskować, że:

$\pi_{\text{dośw}} = 3{,}190$, $u(\pi_{\text{dośw}}) = 0{,}062$,

$\pi_{\text{tabl}} = 3{,}14159$.

Niepewność wartości tablicowej nie jest podana, zatem musimy ją pominąć. Sprawdzając kryterium zbieżności (32) obliczamy lewą i prawą stronę nierówności:

L: $|3{,}190 - 3{,}14159| = 0{,}04841$,

P: 0,062.

Porównując lewą i prawą stronę:

$0{,}04841 < 0{,}062$

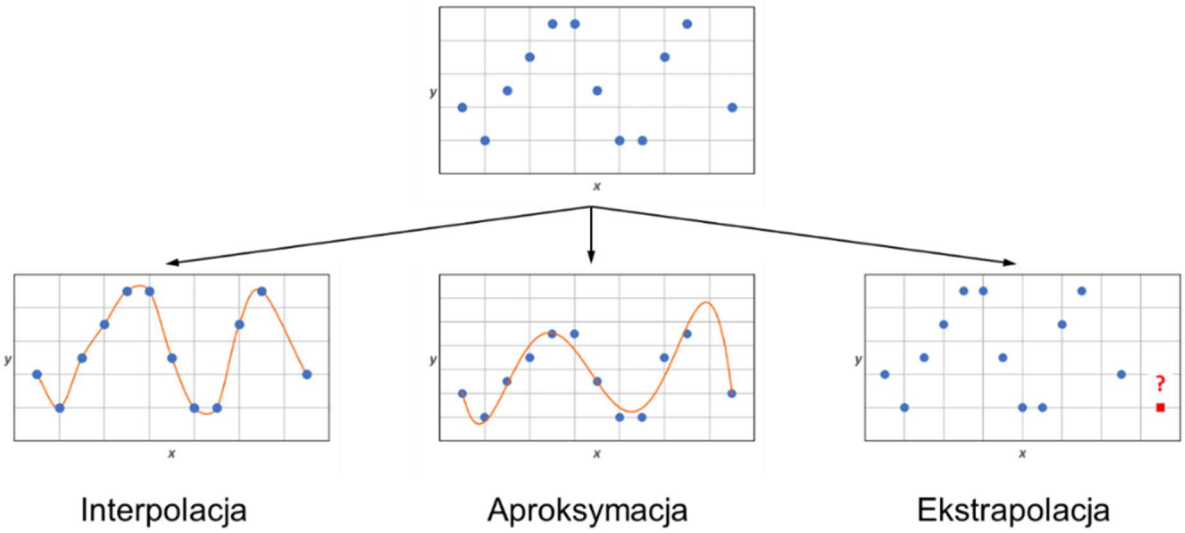
stwierdzamy, że kryterium zbieżności jest spełnione. Wniosek można sformułować następująco: ***Wartości liczby π: tablicowa i uzyskana doświadczalnie są zbieżne (w granicach swoich niepewności).***

7. ZALEŻNOŚCI FUNKCYJNE MIĘDZY WIELKOŚCIAMI

7.1. Zależności funkcyjne: znajdowanie wartości niezmierzonych

W pomiarach z zakresu nauk przyrodniczych bardzo często zachodzi potrzeba zbadania zależności funkcyjnej między wielkościami. Mierzone są wielkości y zależne od innych wielkości x_1, x_2 itd., czyli badana jest zależność $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Wielkości $\boldsymbol{x_i}$ w nawiasie to **zmienne kontrolowane**. Czasami nazywa się je zmiennymi niezależnymi, chociaż określenie to ma charakter umowny, ponieważ mogą one zależeć od siebie lub od inwencji osoby wykonującej pomiary i kontrolującej proces pomiarowy. Wielkość $\boldsymbol{y}$ (bądź wielkości, jeżeli jest badanych kilka jednocześnie) jest **zmienną zależną**, ponieważ zależy ona od zmiennych kontrolowanych. Określenie zależności $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ pozwala na przewidywanie wartości y dla wartości x_i, których nie zastosowano w eksperymencie. Można to zrobić poprzez: aproksymację, interpolację oraz ekstrapolację (Rysunek 11). Najczęściej stosuje się **aproksymację**, czyli wartości niepomiarowe wyznacza się poprzez opisanie punktów pomiarowych funkcją o znanym równaniu matematycznym. Należy zauważyć, że w aproksymacji na wykresie punkty pomiarowe bardzo rzadko leżą dokładnie na linii opisującej te punkty. **Interpolacja** polega na znalezieniu wartości y dla innych wartości x_i niż pomiarowe, poprzez opisanie punktów pomiarowych funkcją, której wykres przechodzi przez wszystkie te punkty. Sposób ten wykorzystywany jest w sytuacjach, gdy zależność $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ jest trudna do opisania równaniem matematycznym. **Ekstrapolacja** polega na wyznaczaniu

wartości poza zakresem wartości wykorzystanych w pomiarach. Spośród trzech opisanych podejść jest stosowana najrzadziej, chociaż bywa przydatna, jeśli przedział wartości zmiennych ***x*** użytych w pomiarach punktów nie obejmuje wartości wymaganych w danej sytuacji.



Rysunek 11. Interpolacja, aproksymacja i ekstrapolacja na przykładzie badanej eksperymentalnie zależności $y = f(x)$

7.2. Regresja

Regresja w ujęciu ogólnym to proces **znalezienia równania matematycznego** najlepiej opisującego zależność $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Jest ona zatem sposobem na **aproksymację**. Prosto wyjaśniając, równanie najlepiej opisujące to takie, którego wykres przechodzi przez lub w pobliżu jak największej liczby punktów pomiarowych. Nie ma ograniczeń co do szukanego równania matematycznego, bowiem może być to funkcja liniowa, kwadratowa, potęgowa, wykładnicza itp. Należy jednak pamiętać, aby **dopasowane równanie miało podstawy fizyczne badanego zjawiska, przykładowo: nie można dopasować funkcji liniowej do zależności w przypadku, w którym wiadomo, że jest to zależność wykładnicza**.

7.3. Regresja liniowa

Regresja liniowa jest najlepiej opisaną regresją, a jednocześnie najczęściej przeprowadzaną. Najpowszechniejszą regresją liniową jest **regresja liniowa prosta**, czyli dopasowanie do danych eksperymentalnych **funkcji liniowej jednej zmiennej**, tj. funkcji o postaci (34):

$$y(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b} \quad , \tag{34}$$

gdzie:

$y(x)$ – wartość funkcji (zmienna zależna), której wartość obliczamy dla danego x; **w pomiarach**: najczęściej odpowiada wielkości mierzonej;

x – zmienna niezależna, czyli argument funkcji; **w pomiarach**: zwykle jest to wielkość, którą kontrolujemy lub znamy z doświadczenia;

a – współczynnik kierunkowy (nachylenie prostej), określający jak szybko zmienia się y wraz ze zmianą x (im wyższa wartość *a* tym szybsza zmiana *y* względem *x*);

b – *wyraz* wolny (punkt przecięcia z osią y); **w pomiarach**: może reprezentować wartość początkową, przesunięcie lub offset pomiaru.

Regresję liniową prostą wyprowadza się z ogólnego równania regresji liniowej o postaci (35), sprowadzając je tylko do jednej zmiennej:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \quad , \tag{35}$$

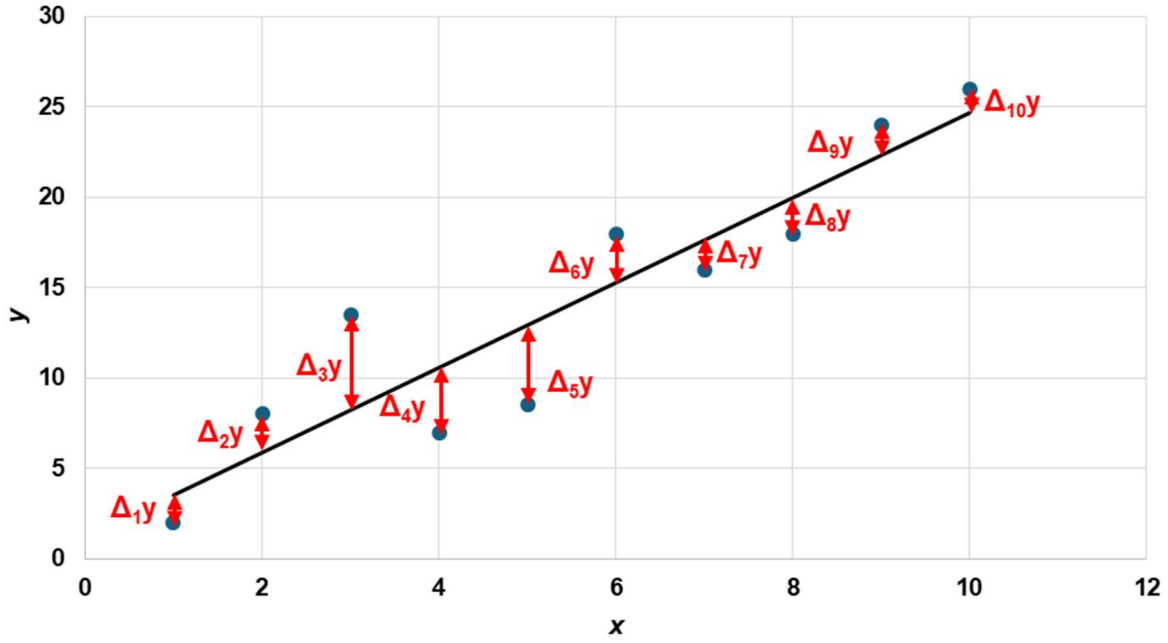
gdzie:

β_0 – wyraz wolny;

$\beta_1, \beta_2, \dots$ – współczynniki liniowości.

Regresja liniowa opisana równaniem (35) jest stosowana zdecydowanie rzadziej niż regresja liniowa prosta, a więc nie zostanie tu opisana. W dalszej części skryptu przez pojęcie „regresja liniowa” będzie rozumiana *de facto* regresja liniowa prosta.

Głównym celem regresji liniowej jest znalezienie parametrów linii prostej, tj. *a* oraz *b*. Ze względu na dość skomplikowane obliczenia prowadzące do otrzymania wzorów (36–40) wynikających z regresji liniowej, ich matematyczne wyprowadzenie nie zostanie tu przedstawione, choć warto w tym miejscu wyjaśnić podstawy ich otrzymania. Mianowicie wynikają one z podejścia zwanego **metodą najmniejszych kwadratów** (w skrócie MNK), która wychodzi z założenia, że **suma kwadratów różnic między wartością zmierzoną zmiennej zależnej *y* a jej wartością wynikającą z równania matematycznego opisującego zależność $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ osiąga wartość możliwie najmniejszą**, tj. $\sum_{i=1}^{n}[y(x_i) - y_{teor}(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i y)^2 = \mathbf{min}$. Metoda ta ma zastosowanie nie tylko w regresji liniowej, ale także przy dowolnej funkcji dopasowywanej do danych eksperymentalnych. Ideę MNK przedstawia Rysunek 12.



Rysunek 12. Przykład przedstawiający ideę metody najmniejszych kwadratów na przykładzie regresji liniowej

Parametry linii prostej mogą być obliczone według wzorów (36) i (37):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{36}$$

$$b = \bar{y} - a\,\bar{x} \tag{37}$$

gdzie:

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna ze zmiennych kontrolowanych,

$\bar{y}$ – średnia arytmetyczna ze zmiennych zależnych.

Niepewności stałych *a* i *b* mogą być obliczone według wzorów (38) i (39):

$$u(a) = S_a = \sqrt{\frac{n\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} y_i\right]}{(n-2)\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}} \tag{38}$$

$$u(b) = S_b = S_a\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \tag{39}$$

W regresji (także nieliniowej) ważny jest wskaźnik zwany **współczynnikiem determinacji R^2**. Przyjmuje on wartości z zakresu < 0, 1 > i zawiera informację, w jakim stopniu dopasowana funkcja pokrywa się z danymi doświadczalnymi. To, czy jest to dobre dopasowanie, jest kwestią umowną. Matematycznie o dobrym dopasowaniu świadczą wartości $R^2 > 0{,}81$. W pomiarach fizycznych i chemicznych, dla odpowiednio dużej liczby wartości zmiennej kontrolowanej w eksperymencie, akceptowalne dopasowanie istnieje najczęściej dla $R^2 > 0{,}9$, w szczególności $R^2 > 0{,}95$. Współczynnik determinacji można obliczyć z zależności (40):

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[y_{teor}(x_i) - \bar{y}]^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{40}$$

,

gdzie:

$y_{teor}(x_i)$ – wartość *y* teoretyczna, tj. obliczona na podstawie równania regresji.

Ze względu na złożoność wzorów (36–40) oraz bardzo częste stosownie regresji liniowej, większość programów kalkulacyjnych posiada wbudowane narzędzia

umożliwiające szybkie obliczanie parametrów regresji. Taką funkcję ma również program MS Excel (→ rozdział 8.2).

Przykład P7.3.1

Zbadano zależność absorbancji (związanej z intensywnością zabarwienia) od stężenia bilirubiny w buforze.

***c* [M]**	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015
Abs	0,2845	0,3342	0,3699	0,4156	0,4653	0,525	0,5567	0,6144	0,6521	0,7078	0,7455

Wyznaczyć równanie opisujące absorbancję w zależności od stężenia hemoglobiny, przyjmując zależność liniową: $Abs = f(c) = a \cdot c + b$.

Rozwiązanie:

Korzystające ze wzorów (36–39), najpierw oblicza się wielkości pośrednie potrzebne do obliczenia wszystkich parametrów funkcji liniowej. Ich zestawienie (bez uwzględnienia jednostek) znajduje się poniżej:

i	***X*** **(*c* [M])**	***Y*** **(*Abs*)**	$(x_i - \bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	0,005	0,2845	0,0011552	0,0000250	0,0809403	0,0014225	0,0000250
2	0,006	0,3342	0,0007254	0,0000160	0,1116896	0,0020052	0,0000360
3	0,007	0,3699	0,0004369	0,0000090	0,1368260	0,0025893	0,0000490
4	0,008	0,4156	0,0001999	0,0000040	0,1727234	0,0033248	0,0000640
5	0,009	0,4653	0,0000502	0,0000010	0,2165041	0,0041877	0,0000810
6	0,01	0,525	0	0	0,2756250	0,0052500	0,0001000
7	0,011	0,5567	0,0000412	0,0000010	0,3099149	0,0061237	0,0001210
8	0,012	0,6144	0,0001977	0,0000040	0,3774874	0,0073728	0,0001440
9	0,013	0,6521	0,0004097	0,0000090	0,4252344	0,0084773	0,0001690
10	0,014	0,7078	0,0007690	0,0000160	0,5009808	0,0099092	0,0001960
11	0,015	0,7455	0,0011498	0,0000250	0,5557703	0,0111825	0,0002250
Średnie:	$\bar{x}$ = 0,01	$\bar{y}$ = 0,515545					
Sumy:	Σ = 0,11	Σ = 5,671	Σ = 0,0051350	Σ = 0,0001100	Σ = 3,1636961	Σ = 0,0618450	Σ = 0,0012100

Podstawiając odpowiednie wartości, uzyskuje się (dla czytelności zapisu jednostki parametrów regresji podano tylko przy wartości końcowej):

$$a = \frac{0{,}0051350}{0{,}0001100}\ M^{-1} = 46{,}682\ \mathrm{M}^{-1}$$

$$b = 0{,}515545 - 46{,}682\ \mathrm{M}^{-1} \cdot 0{,}01\ \mathrm{M} = 0{,}0487$$

$$u(a) = S_a = \sqrt{\frac{11 \cdot (3{,}1636961 - 46{,}682 \cdot 0{,}0618450 - 0{,}0487 \cdot 5{,}671)}{(11-2)[11 \cdot 0{,}0012100 - (0{,}11)^2]}} =$$

$$= 0{,}5744\ \mathrm{M}^{-1}$$

$$u(b) = S_b = 0{,}5744 \sqrt{\frac{0{,}0012100}{11}} = 0{,}00602$$

W celu obliczenia współczynnika determinacji R^2 należy obliczyć wartości $y_{teor}(x_i)$, które zależą od parametrów równania regresji, w tym przypadku liniowej:

(41) $$y_{teor}(x_i) = a \cdot x_i + b$$

Zatem otrzymuje się:

i	x (c [M])	y (*Abs*)	$y_{teor}(x_i)$	$(y_{teor} - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	0,005	0,2845	0,282136	0,054479804	0,053382
2	0,006	0,3342	0,328818	0,034867074	0,032886
3	0,007	0,3699	0,3755	0,019612729	0,021213
4	0,008	0,4156	0,422182	0,008716769	0,009989
5	0,009	0,4653	0,468864	0,002179192	0,002525
6	0,01	0,525	0,515545	0	0,0000894
7	0,011	0,5567	0,562227	0,002179192	0,001694
8	0,012	0,6144	0,608909	0,008716769	0,009772
9	0,013	0,6521	0,655591	0,019612729	0,018647
10	0,014	0,7078	0,702273	0,034867074	0,036962
11	0,015	0,7455	0,748955	0,054479804	0,052879
Średnie:	$\bar{x}$ = 0.01	$\bar{y}$ = 0.515545			
Sumy:	Σ = 0,11	Σ = 5,671		Σ = 0,2397111	Σ = 0,2400378

Współczynnik determinacji R^2 jest zatem równy:

$$R^2 = \frac{0{,}2397111}{0{,}2400378} = 0{,}9986$$

Warto zauważyć, że odzwierciedleniem współczynnika determinacji bliskiemu jedności są wartości $y_{teor}(x_i)$, czyli wartości wyznaczone na podstawie równania regresji, które są bardzo zbliżone do wartości eksperymentalnych y_i. Oznacza to, że dopasowana funkcja liniowa w sposób satysfakcjonujący opisuje dane eksperymentalne.

7.4. Test χ^2

Choć współczynnik determinacji stanowi statystyczny wskaźnik dopasowania funkcji do danych eksperymentalnych, nie mówi o prawdopodobieństwie, z jakim można uznać, że dopasowane równanie prawidłowo opisuje dane eksperymentalne. Aby móc to stwierdzić, należy przeprowadzić odpowiedni test statystyczny. Takim testem jest **test χ^2** (czytaj **test chi-kwadrat**). Choć ma on ograniczenie w zastosowaniu w postaci warunku odpowiednio dużej liczby pomiarów (najlepiej $n > 30$, co często jest ignorowane), cechuje się **uniwersalnością** w odniesieniu do dopasowanego równania matematycznego (nie musi być ono liniowe). Do przeprowadzenia testu χ^2 wymagana jest omówiona w rozdziale 5 **niepewność zmiennej zależnej *y***.

Etapy przeprowadzenia tego testu są następujące:

1) Na podstawie równania (42) należy obliczyć wartość statystyki testowej:

$$\chi^2_{exp} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i - y_{teor}(x_i)}{u(y_i)} \right]^2 \tag{42}$$

2) Otrzymaną wartość χ^2_{exp} należy porównać z wartością krytyczną $\boldsymbol{\chi^2_{kryt}}$ odczytaną z tablic rozkładu χ^2 dla liczby stopni swobody ***m***, liczonej jako różnica (43):

(43) $$m = n - k$$,

gdzie:

k – **liczba parametrów (stałych)** w równaniu matematycznym wyznaczanych na podstawie danych eksperymentalnych (zatem do *k* **nie** wliczają się stałe matematyczne, jak liczba π czy liczba Eulera). Sposób określania *k* dla przykładowych funkcji przedstawiono poniżej:

Funkcja	***k***
$y(x) = \boldsymbol{a} \cdot x$	1
$y(x) = \boldsymbol{a} \cdot x + \boldsymbol{b}$	2
$y(x) = \boldsymbol{a} \cdot x^2 + \boldsymbol{b} \cdot x + \boldsymbol{c}$	3
$y(x) = \boldsymbol{a} \cdot e^{\boldsymbol{b} \cdot x}$	2

3) Na podstawie przeprowadzonego porównania należy sformułować wniosek:

- jeśli $\chi^2_{exp} > \chi^2_{kryt}$ → zastosowane równanie matematyczne **nie opisuje prawidłowo** badanej zależności między zmiennymi *y* i *x*;
- jeśli $\chi^2_{exp} < \chi^2_{kryt}$ → **nie ma podstaw do odrzucenia** modelu (równania) matematycznego zastosowanego do opisu badanej zależności między zmiennymi *y* i *x*.

W odniesieniu do pomiarów w naukach przyrodniczych, przy porównaniu w punkcie 3) bardziej zrozumiałe będzie stwierdzenie łączące aspekt matematyczny, jak i przyrodniczy (fizyczny, chemiczny, biologiczny itp.) wykonywanych badań, np.:

a) przy weryfikacji równania linii prostej: *Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że współczynnik załamania światła z prawdopodobieństwem 95% zależy liniowo od stężenia glukozy w roztworze wodnym w zakresie stężeń 1,25–30%*;
b) przy weryfikacji prawa Lamberta (prawo o postaci funkcji wykładniczej): *Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że z prawdopodobieństwem 95%*

absorpcja światła laserowego w wodzie spełnia prawo Lamberta w zakresie grubości warstwy absorbującej 0,5–5 cm (→ patrz przykład P7.5.1).

Przykład P7.4.1

Na podstawie danych z poprzedniego zadania (Przykład P7.3.1) należy stwierdzić, czy zależność $Abs = f(c)$ z prawdopodobieństwem 95% może być opisana funkcją liniową $Abs(c) = a \cdot c + b$. Należy przyjąć, że niepewność względna absorbancji wynosi 5%.

Rozwiązanie:

Mając do dyspozycji wartości x, y oraz y_{teor} z przykładu P7.3.1, należy policzyć niepewność dla każdego $y(x)$, każdy składnik sumy (40) będącej statystyką testową oraz ostateczną wartość tej statystyki:

i	x_i (c [M])	$y(x_i)$ (Abs)	$y_{teor}(x_i)$	$u(y)$	$\left(\frac{y(x_i) - y_{teor}(x_i)}{u(y)}\right)^2$
1	0,005	0,2845	0,282136	0,014225	0,027617884
2	0,006	0,3342	0,328818	0,01671	0,103737192
3	0,007	0,3699	0,3755	0,018495	0,091678475
4	0,008	0,4156	0,422182	0,02078	0,100328581
5	0,009	0,4653	0,468864	0,023265	0,023467632
6	0,01	0,525	0,515545	0,02625	0,129737179
7	0,011	0,5567	0,562227	0,027835	0,039427249
8	0,012	0,6144	0,608909	0,03072	0,031949235
9	0,013	0,6521	0,655591	0,032605	0,011463871
10	0,014	0,7078	0,702273	0,03539	0,024390337
11	0,015	0,7455	0,748955	0,037275	0,008591338
Suma (statystyka testowa χ^2_{exp}):					**0,592388973**

Następnie z tablic rozkładu χ^2 odczytujemy wartość χ^2_{kryt}. Poziom ufności wynosi 95%. Skoro sprawdzamy równanie liniowe typu $y(x) = a \cdot x + b$, to liczba stopni swobody jest równa: $m = n - k = 11 - 2 = 9$. Dla tej wartości $\chi^2_{kryt} = 16{,}92$. W związku z tym $\chi^2_{exp} < \chi^2_{teor}$, a więc jako ostateczny wniosek można sformułować, że nie ma podstaw do odrzucenia, że absorbancja zależy liniowo od stężenia bilirubiny w roztworze.

7.5. Linearyzacja

Wiele praw w naukach przyrodniczych nie ma charakteru liniowego. Choć w przypadku równań nieliniowych można zastosować regresję nieliniową, regresja liniowa (w szczególności prosta) jest najprostsza i najszybsza do przeprowadzenia. Okazuje się, że można ją stosować także do praw nieliniowych, pod warunkiem, że zostaną one matematycznie przekształcone, czyli **zlinearyzowane**. **Linearyzacja** jest zatem zabiegiem matematycznym, przekształcającym **równanie nieliniowe w liniowe** o postaci (44):

$$Y(X) = A \cdot X + B \tag{44}$$

Wszystkie oznaczenia w równaniu (44) są napisane celowo wielkimi literami, ponieważ nawiązują one w rzeczywistości nie do natywnego równania opisującego rozpatrywane prawo (fizyczne, chemiczne, biologiczne), a do jego zlinearyzowanej postaci. Typowe i najczęstsze linearyzacje przedstawiono w Tabeli 5.

Tabela 5. Linearyzacja typowych równań nieliniowych możliwych do zlinearyzowania

Równanie nieliniowe	**Postać po linearyzacji**	**Zależność podlegająca regresji liniowej**	**Współczynniki w równaniu nieliniowym**	**Przykład**
$y(x) = ae^{bx}$	$\ln y = \ln a + b \cdot x$ $Y = B + A \cdot X$	$\ln y = f(x)$	$a = e^B$ $b = A$	Prawo Lamberta (Bouguera) $I(x) = I_0 e^{-kx}$
$y(x) = ax^b$	$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x$ $Y = B + A \cdot X$	$\ln y = f(\ln x)$	$a = e^B$ $b = A$	Reologia kremów $\tau(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^n$
$y(x) = \frac{ax}{x+b}$	$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x}$ $Y = B + A \cdot X$	$\frac{1}{y} = f\left(\frac{1}{x}\right)$	$a = \frac{1}{B}$ $b = \frac{A}{B}$	Szybkość reakcji enzymatycznej spełniającej model Michaelisa-Menten $r(c_s) = \frac{r_{max} c_s}{K_M + c_s}$
$y(x) = \frac{a}{b+e^x}$	$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a} \cdot e^x$ $Y = B + A \cdot X$	$\frac{1}{y} = f(e^x)$	$a = \frac{1}{A}$ $b = \frac{B}{A}$	Aktywacja neuronu sieci neuronowej $f_a(s) = \frac{1}{1+e^{-s}}$

Przykład P.7.5.1

Dana jest zależność natężenia światła monochromatycznego I_0 o pewnej długości fali po przejściu przez warstwę absorbującą w zależności od grubości tej warstwy x:

x [cm]	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$I(x)$ [MW·m^{-2}]	29,0	18,9	11,0	7,5	4,1	2,5	1,8	1,0	0,7	0,4

Przyjmując stosowalność prawa Lamberta, wyznaczyć natężenie światła padającego na warstwę absorbującą oraz współczynnik absorpcji tego światła badanej warstwy absorbującej.

Rozwiązanie

Prawo Lamberta jest prawem nieliniowym o postaci:

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

Zgodnie z Tabelą 5 prawo to można zlinearyzować poprzez obustronne zlogarytmowanie logarytmem naturalnym. W efekcie, po zastosowaniu własności logarytmów, otrzymujemy równanie:

$$\ln I(x) = \ln I_0 - kx$$

Skoro w tej linearyzacji przyjmujemy $Y = \ln I(x)$, oraz $X = x$, to logarytmujemy wartości $I(x)$ otrzymując $\ln I(x)$:

$X = x$	$Y = \ln I(x)$
0,5	3,367296
1	2,939162
1,5	2,397895
2	2,014903
2,5	1,410987
3	0,916291
3,5	0,587787
4	0
4,5	-0,35667
5	-0,91629

Następnie przeprowadzamy regresję liniową przyjmując zależność w postaci $Y = A \cdot X + B$, czyli:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & = & A & \cdot & X & + & B \\ \ln I(x) & = & -k & \cdot & x & + & \ln I_0 \end{array}$$

W wyniku przeprowadzonej regresji otrzymujemy wartości:

A = -0,95017 cm^{-1}	$u(A)$ = 0,013258 cm^{-1}
B = 3,849091	$u(B)$ = 0,041131
R^2 = 0,998445	

Jednocześnie wiemy, że:

$$k = -A = 0{,}95017 \text{ cm}^{-1}$$

$$I_0 = e^B = 1{,}041989 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$$

7.6. Znaczenie wykresów w regresji

Skoro regresja dotyczy dopasowania funkcji do danych pomiarowych, niezwykle pomocne, a wręcz **niezbędne, jest wcześniejsze sporządzenie odpowiedniego wykresu** zależności $y = f(x)$ badanej doświadczalnie. Pominięcie etapu rysowania wykresu sprawia, że przeprowadzenie regresji (np. liniowej) wyłącznie w ujęciu statystycznym może skutkować otrzymaniem jedynie zestawu liczb niekoniecznie odzwierciedlających stan faktyczny. W celu udowodnienia znaczenia wykresów można posłużyć się przykładem opublikowanym przez Francisa Johna Anscombe‘a (Anscombe F.J., *Graphs in Statistical Analysis*; American Statistician, 27(1) 1973, p.17–21).

W tabelach poniżej znajdują się 4 serie pomiarowe $y = f(x)$, dla których przeprowadzono regresję liniową:

Seria 1	
x	***y***
10,0	8,04
8,0	6,95
13,0	7,58
9,0	8,81
11,0	8,33
14,0	9,96
6,0	7,24
4,0	4,26
12,0	10,84
7,0	4,82
5,0	5,68

Seria 2	
x	***y***
10,0	9,14
8,0	8,14
13,0	8,74
9,0	8,77
11,0	9,26
14,0	8,10
6,0	6,13
4,0	3,10
12,0	9,13
7,0	7,26
5,0	4,74

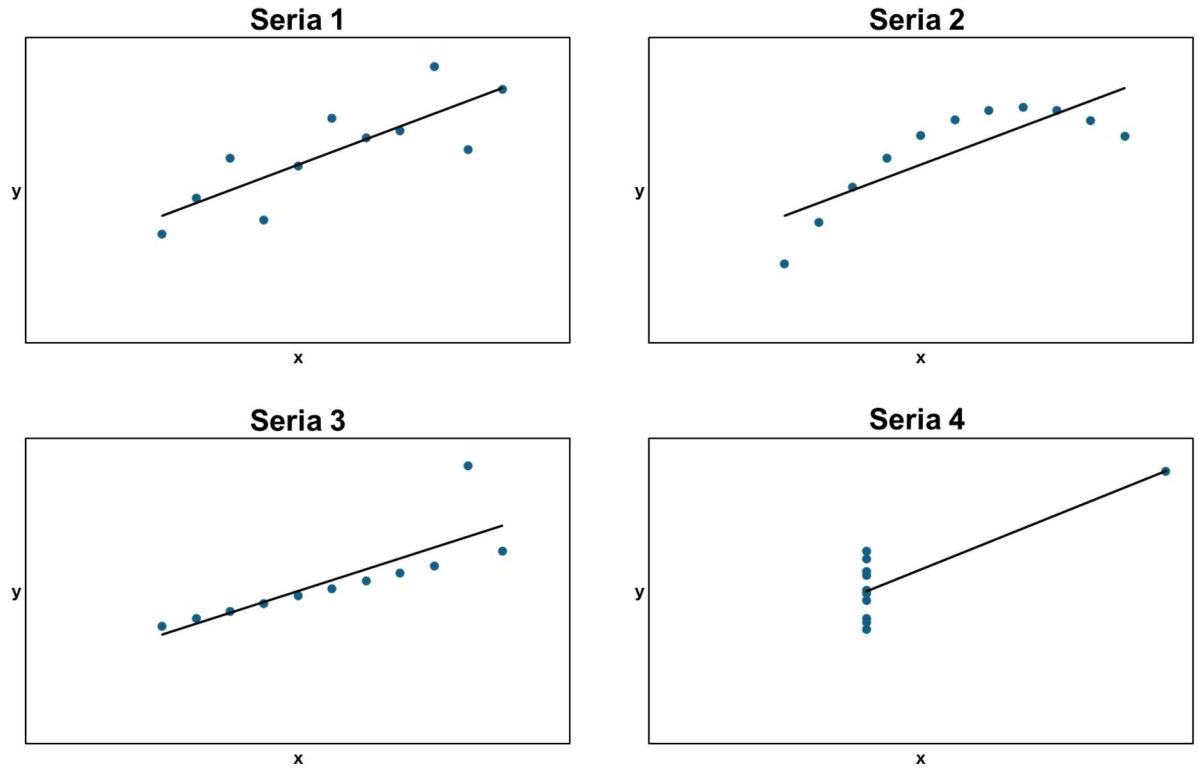
Seria 3	
x	***y***
10,0	7,46
8,0	6,77
13,0	12,74
9,0	7,11
11,0	7,81
14,0	8,84
6,0	6,08
4,0	5,39
12,0	8,15
7,0	6,42
5,0	5,73

Seria 4	
x	***y***
8,0	6,58
8,0	5,76
8,0	7,71
8,0	8,84
8,0	8,47
8,0	7,04
8,0	5,25
19,0	12,50
8,0	5,56
8,0	7,91
8,0	6,89

Przeprowadzając regresję liniową dla każdej serii otrzymuje się te same wartości parametrów:

Parametry statystyczne regresji liniowej	**Wartość**
Liczba obserwacji	11
Średnia wartości zmiennej x	9,0
Średnia wartości zmiennej y	7,5
Równanie regresji	$y = 0{,}5x + 3$
Niepewność standardowa współczynnika kierunkowego	0,118
Współczynnik determinacji R^2	0,667

Wykresy $y = f(x)$ sporządzone na podstawie wartości w seriach pomiarowych przedstawiono na Rysunku 13.



Rysunek 13. Wykresy ilustrujące dane liczbowe z przykładu w punkcie 7.6.

Z wykresów wynika, że przeprowadzona regresja liniowa ma uzasadnienie (bardziej matematyczne niż fizyczne lub chemiczne) tylko w przypadku serii 1. Pomiary w serii 2 wykazują zależność kwadratową, w serii 3 – jeden z punktów wyraźnie odstaje i należałoby go usunąć z serii pomiarowej, natomiast w serii 4 – trudno wyciągnąć jednoznaczny wniosek, choć wykres sugeruje wystąpienie błędu ludzkiego lub technicznego w trakcie eksperymentu.

7.7. Reguły rysowania wykresów w fizyce

Wykres jest jednym z najważniejszych elementów opracowania wyników pomiarowych. Aby mógł być właściwie wykorzystany, należy go sporządzić według określonych reguł, wymienionych poniżej. Warto jednak zaznaczyć, że wszystkie te zasady wynikają z jednej, nadrzędnej: **wykres powinien być czytelny i zrozumiały**, również dla osób niezaznajomionych z prezentowanym

zagadnieniem. Z wykresu powinny być możliwe do odczytania następujące informacje:

a) przedmiot badania;

b) warunki przeprowadzenia eksperymentu;

c) mierzona wielkość wraz z jednostkami;

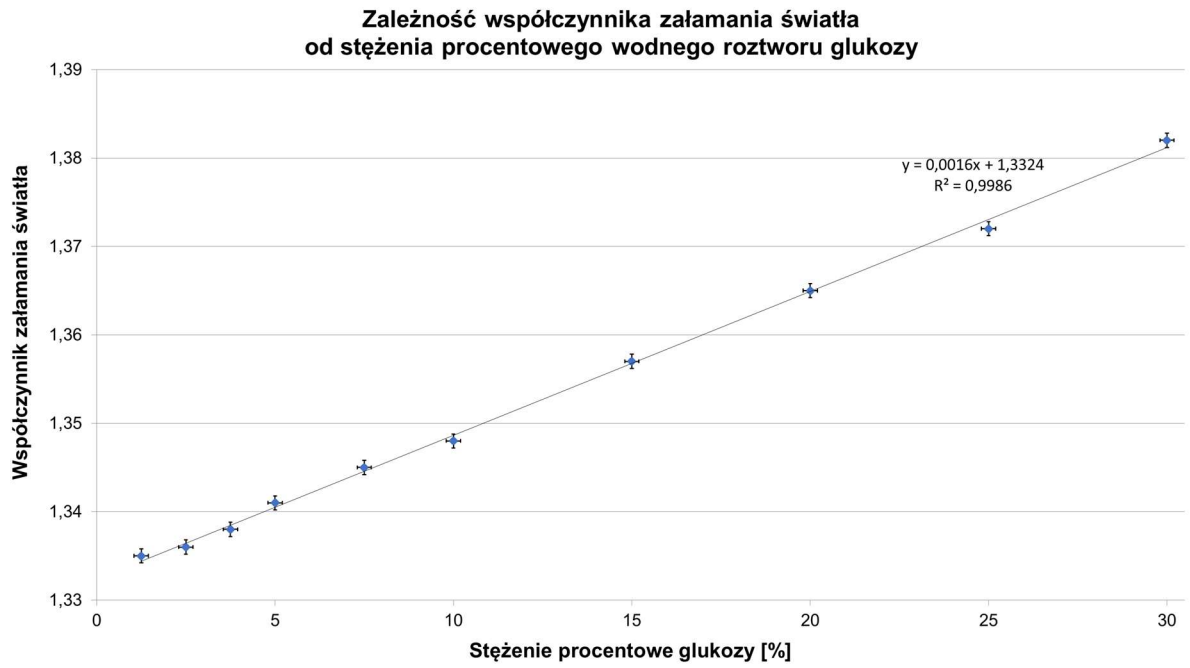
d) uzyskane wartości (w przybliżeniu odczytywane z wykresu);

e) niepewności pomiarowe, o ile mają zastosowanie.

Zatem rozwijając nadrzędną zasadę, reguły rysowania wykresów są następujące:

1) Rodzaj wykresu powinien być **dostosowany do prezentowanego zagadnienia**; w fizyce – najczęściej **kartezjański układ współrzędnych**.
2) Wykres powinien być opatrzony **tytułem lub podpisem** jasno wskazującym, czego dotyczy. **Osie** należy **opisać**, podając symbol danej wielkości fizycznej (lub jej pełną nazwę), jej zależność funkcyjną oraz jednostkę. **W miarę możliwości** jednostki na osiach powinny być jednostkami układu **SI** lub ich wielokrotnościami.
3) Zakres wykreślonych punktów powinien pokrywać się z zakresem osi wykresu tak, aby punkty pomiarowe znalazły się na całej powierzchni ograniczonej osiami (zakres zmiennej na osi **nie musi zaczynać się od zera**).
4) Punkty pomiarowe należy zaznaczyć **wyraźnie i jednoznacznie**, aby czytelnik mógł odczytać przybliżone wartości współrzędnych poszczególnych punktów.
5) Punktów pomiarowych **nie należy łączyć linią łamaną**. Można je łączyć jedynie linią gładką i tylko w sytuacji, kiedy jest znana lub przewidywana zależność fizyczna między wielkościami uwzględnionymi na osiach wykresu.
6) Odcinki niepewności (o ile są wystarczająco duże) należy nanosić tak, aby nie zaciemniały informacji zawartych na wykresie, i tylko wtedy, gdy jest to niezbędne z punktu widzenia prezentacji wyników.

Przykład poprawnie sporządzonego wykresu przedstawiono na Rysunku 14.



Rysunek 14. Przykład poprawnie sporządzonego wykresu. *Uwaga: Współczynnik załamania światła jest to wielkością bezwymiarową, stąd na osi pionowej nie podano jednostki*

Należy zwrócić uwagę, że przedstawiony wykres:

a) jest czytelny;
b) posiada tytuł – wiadomo, czego dotyczy;
c) zaznaczono niepewności pomiarowe w postaci pionowych i poziomych słupków (zwanych czasem „wąsami”);
d) osie są podpisane – wiadomo, jaka wielkość jest mierzona oraz w jakich jednostkach.

7.8. Inne rodzaje regresji liniowej

7.8.1. Komentarz wstępny

W rozdziale 7.3 omówiono tzw. regresję klasyczną, czyli regresję nieuwzględniającą niepewności pomiarowych wartości zmiennej zależnej y i/lub zmiennych kontrolowanych x. Istnieją jednak także regresje, które uwzględniają

takie niepewności: regresja zwyczajna, ważona oraz efektywna (Deminga). Mimo, że wydają się one bardziej odpowiednie w przypadku pomiarów, w których uwzględniono niepewność pomiarową, stosowane są rzadko.

7.8.2. Regresja zwyczajna

Stosowana wtedy, gdy niepewnością obciążone są wartości tylko jednej zmiennej (*x* lub *y*) i dodatkowo niepewności te mają takie same wartości dla wszystkich punktów pomiarowych. Znajduje także zastosowanie wtedy, gdy niepewność względna jednej zmiennej jest znacznie mniejsza (co najmniej 10-krotnie) od niepewności drugiej zmiennej (wówczas niepewność jednej zmiennej można pominąć). Wyrażenia na obliczenie parametrów *a*, *b* oraz R^2 są identyczne jak w regresji klasycznej, natomiast zmianie ulega sposób oszacowania niepewności współczynników *a* i *b*. Przykładowo, sytuacji występowania niepewności zmiennej *y* przy zaniedbywalnej niepewności zmiennej *x* odpowiadają wzory 45 i 46:

(45) $$S_a = u(y)\sqrt{\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}} \quad ,$$

(46) $$S_b = S_a\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

7.8.3. Regresja ważona

Regresja ważona jest podobna do regresji zwyczajnej, z tą różnicą, że niepewności jednej zmiennej mają różne wartości. Analogicznie do średniej ważonej lub niepewności ważonej, regresja ta wymaga zastosowania wag definiowanych według wzoru (5), czyli jako odwrotności kwadratu niepewności

zmiennej *x* lub *y* (stosownie do przypadku). Wagi pomiarów komplikują sposób wyznaczania parametrów regresji, o czym świadczą wzory (47–51):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)^2} \tag{47}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{48}$$

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)^2}} \tag{49}$$

$$S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} \tag{50}$$

$$R^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \sum_{i=1}^{n} w_i y_i\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i y_i\right)^2\right]} \tag{51}$$

7.8.4. Regresja Deminga

Regresja Deminga, znana także jako regresja ortogonalna lub regresja efektywna, jest stosowana w przypadku, gdy niepewnościami pomiarowymi obarczone są zarówno zmienne zależne, jak i niezależne (kontrolowane), a dodatkowo niepewności te mają różne wartości. W celu wyznaczenia parametrów regresji, ze względu na złożoność zależności, wygodnie jest najpierw wyznaczyć wariancję (kwadrat odchylenia standardowego) zmiennej *y* (52),

wariancję zmiennej *x* (53), kowariancję między *y* a *x* (54), wariancję dla *u*(*x*) (55) oraz *u*(*y*) (56) oraz parametr λ (57):

$$Var(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{52}$$

$$Var(y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \tag{53}$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{54}$$

$$Var[u(x)] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[u(x_i) - \overline{u(x)}\right]^2 \tag{55}$$

$$Var[u(y)] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[u(y_i) - \overline{u(y)}\right]^2 \tag{56}$$

$$\lambda = \frac{Var[u(x)]}{Var[u(y)]} \tag{57}$$

Wówczas współczynnik kierunkowy prostej można obliczyć ze wzoru (58):

$$a = \frac{Var(y) - \lambda \cdot Var(x) + \sqrt{[Var(y) - \lambda \cdot Var(x)]^2 + 4\lambda Cov^2(x,y)}}{2Cov(x,y)} \tag{58}$$

Wyraz wolny *b* oblicza się tak, jak w regresji klasycznej – według wzoru (37). Niepewności *u(a)* oraz *u*(*b*) oblicza się stosując metody numeryczne lub empiryczne – nie istnieje bowiem analityczny sposób ich wyznaczenia. Współczynnik determinacji R^2 w regresji Deminga także jest trudny do wyznaczenia, jednak z pewnym przybliżeniem można go obliczyć, stosując wzór (40) dotyczący regresji klasycznej.

Przykład P7.8.1

W tabeli poniżej zestawiono parametry regresji klasycznej, zwyczajnej, ważonej i Deminga dla wartości x i y z przykładu P7.3.1. Przyjęte wartości niepewności podano w kolumnie „Założenia”.

Rodzaj regresji	**Założenia**	a**[M^{-1}]**	b	$u(a)$ **[M^{-1}]**	$u(b)$	R^2	*Uwagi*
Klasyczna	–	46,682	0,048727	0,57445	0,0060249	0,99864	–
Zwyczajna	$u(y) = 0{,}05$	46,682	0,048727	**2,9338**	**0,030770**	0,99864	–
Ważona	$u_{wzgl}(y) = 5\%$	**46,454**	**0,050753**	**2,3237**	**0,020029**	**0,99855**	–
Deminga	$u_{wzgl}(x) = 10\%$ $u_{wzgl}(y) = 5\%$	**46,733**	**0,048218**	*	*	0,99864**	* Metody numeryczne ** Z przybliżeniem

Warto zauważyć, że wartości a, b oraz R^2 dla rożnych rodzajów regresji nie różnią się znacząco między sobą. Zdecydowane różnice widać natomiast w przypadku niepewności parametrów linii prostej, tj. $u(a)$ i $u(b)$, gdzie dla regresji zwyczajnej i ważonej są one większe niż dla regresji klasycznej.

8. OBLICZENIA W PROGRAMIE MS EXCEL

8.1. Program Excel – wstęp

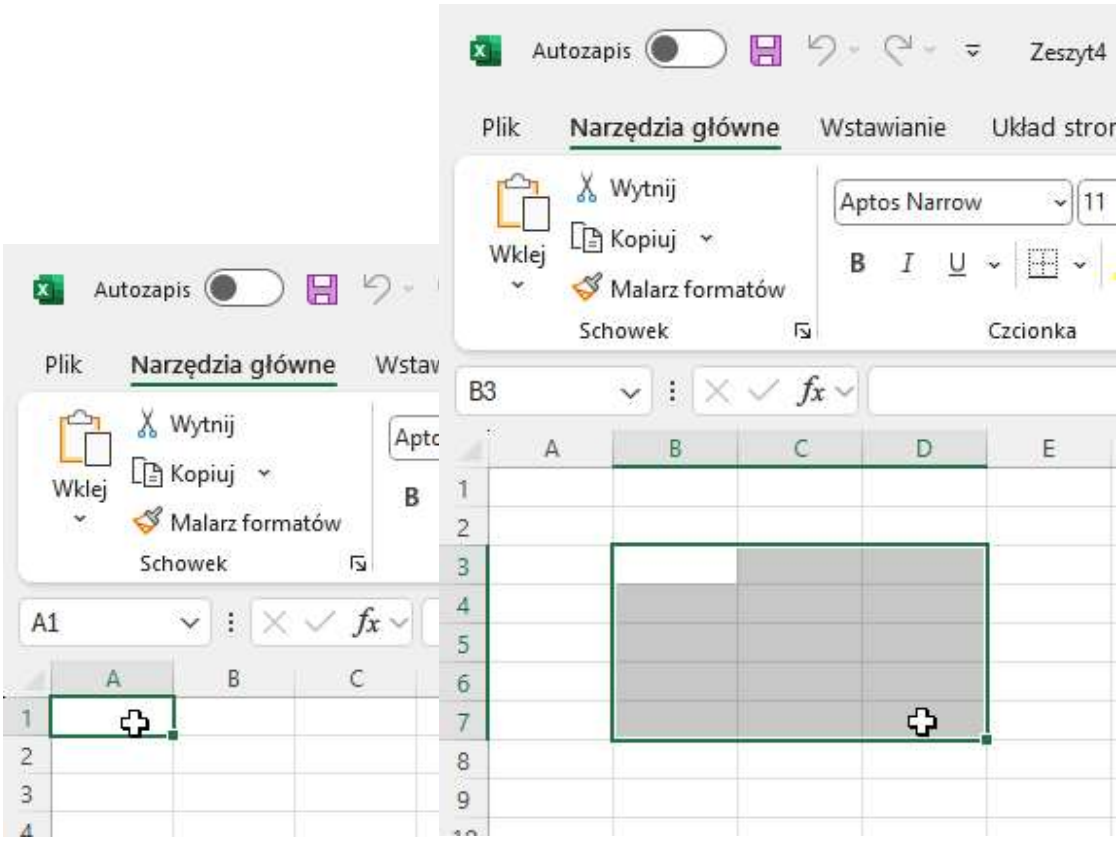
Obecnie dostępnych jest wiele programów kalkulacyjnych. Jednym z najbardziej podstawowych jest Microsoft Excel z pakietu Microsoft Office. Jego zaletą jest zarówno łatwa dostępność, jak i możliwość korzystania z niego bez znajomości języka programowania. Do wykonywania obliczeń wymagana jest jedynie znajomość odpowiednich formuł.

8.2. Podstawowe funkcje i formuły w programie MS Excel

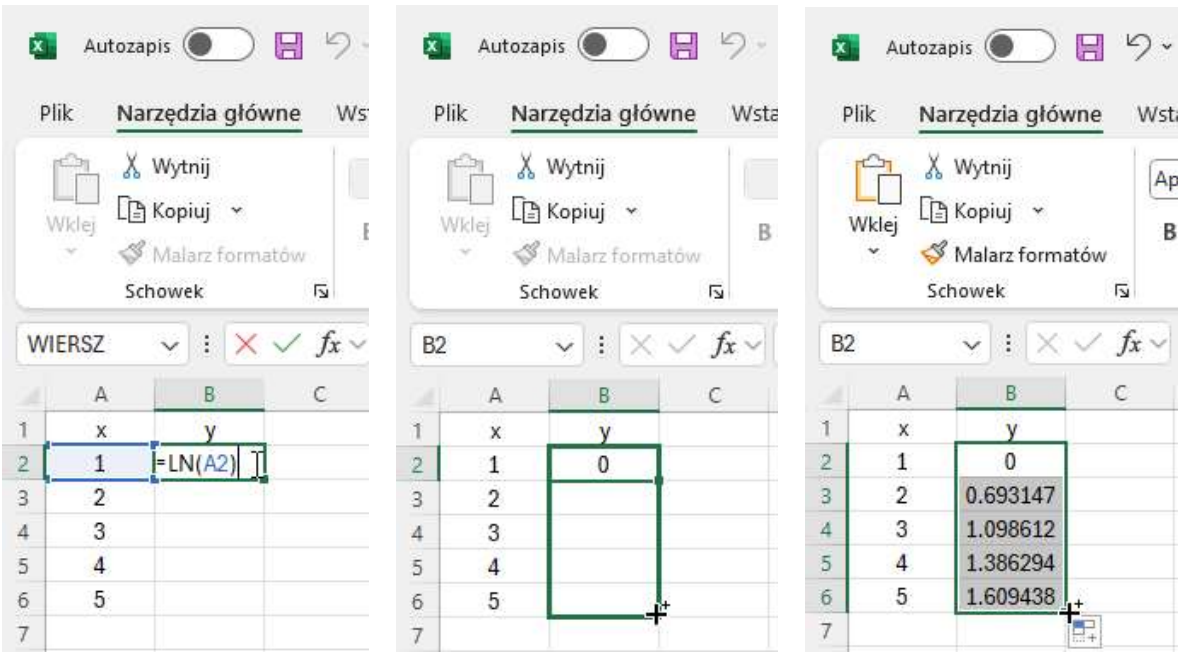
Działanie	**Formuła do wpisania**
DZIAŁANIA PODSTAWOWE	
Dodawanie	=*liczba*+*liczba* **=SUMA(***liczby***)**
Odejmowanie	=*liczba*-*liczba*
Mnożenie	=*liczba*******liczba* **=ILOCZYN(***liczby***)**
Dzielenie	=*liczba*/*liczba*
Potęgowanie / pierwiastkowanie	=*liczba*^*liczba*
Notacja wykładnicza	*liczba***e***liczba całkowita* *liczba***E***liczba całkowita*
Pierwiastek kwadratowy	**=PIERWIASTEK(***liczba***)** **=** *liczba***^0,5** **=** *liczba***^(1/2)**
Wartość bezwzględna	**=MODUŁ.LICZBY(***liczba***)**

Działanie	Formuła do wpisania
PODSTAWOWE FUNKCJE MATEMATYCZNE	
Logarytm (dowolny)	**=LOG(***argument***;***podstawa***)**
Logarytm dziesiętny	**=LOG10(***liczba***)**
Logarytm naturalny	**=LN(***liczba***)**
Funkcja wykładnicza e^x	**=EXP(***liczba***)**
Sinus	**=SIN(***liczba***)**
Cosinus	**=COS(***liczba***)**
Tangens	**=TAN(***liczba***)**
Cotangens	**=COT(***liczba***)**
Wartość największa z zakresu	**=MAX(***liczby***)**
Wartość najmniejsza z zakresu	**=MIN(***liczby***)**
STAŁE MATEMATYCZNE	
Liczba pi	**=PI()**
Liczba Eulera	**=EXP(1)**
OBLICZENIA STATYSTYCZNE	
Średnia arytmetyczna	=**ŚREDNIA(***liczby***)**
Odchylenie standardowe z próby	**=ODCH.STANDARD.PRÓBKI(***liczby***)**
Wartość krytyczna w rozkładzie t-Studenta	**=ROZKŁ.T.ODWR.DS(***poziom istotności***;***liczba stopni swobody***)**
Wartość krytyczna w rozkładzie chi-kwadrat	**=ROZKŁ.CHI.ODWR.PS(***poziom istotności***;***liczba stopni swobody***)**
Regresja liniowa $y(x) = a \cdot x + b$	***zaznaczenie 6 komórek 2×3*** → =**REGLINP(***wartości y(x)***;***wartości x***;***czy liczyć wyraz wolny:* **PRAWDA** *lub* **FAŁSZ;PRAWDA)** → ***Ctrl+Shift+Enter*** **(patrz punkt 8.6)**

8.3. Zaznaczanie komórek

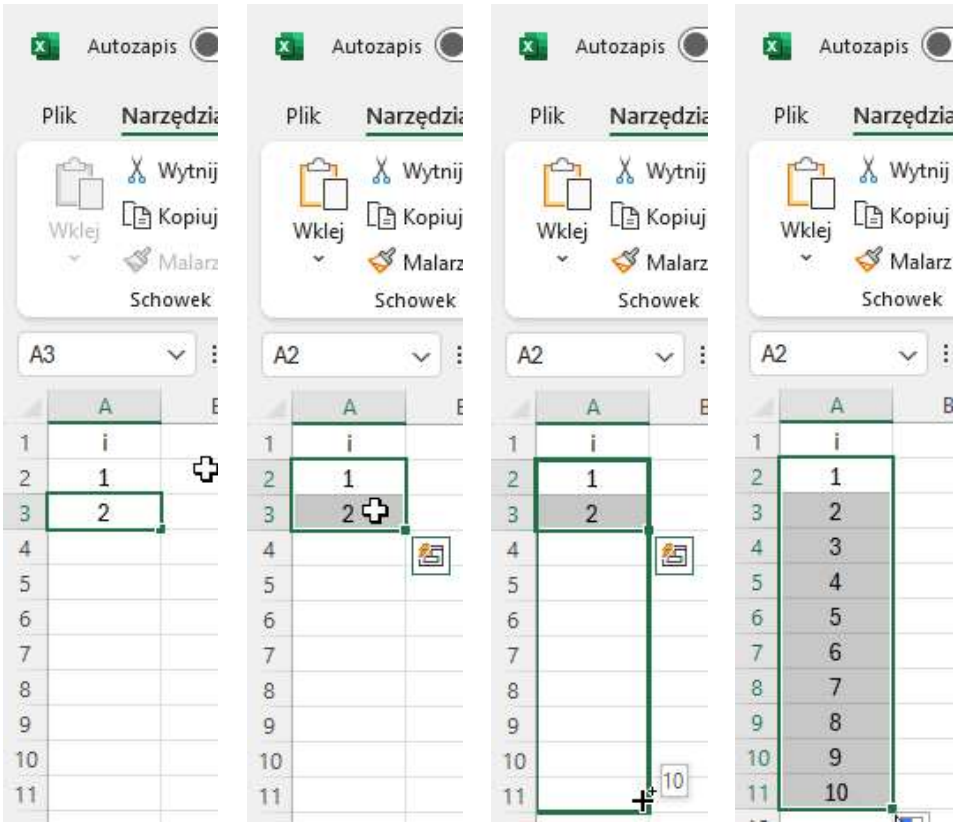


8.4. Kopiowanie (przeciąganie) formuły

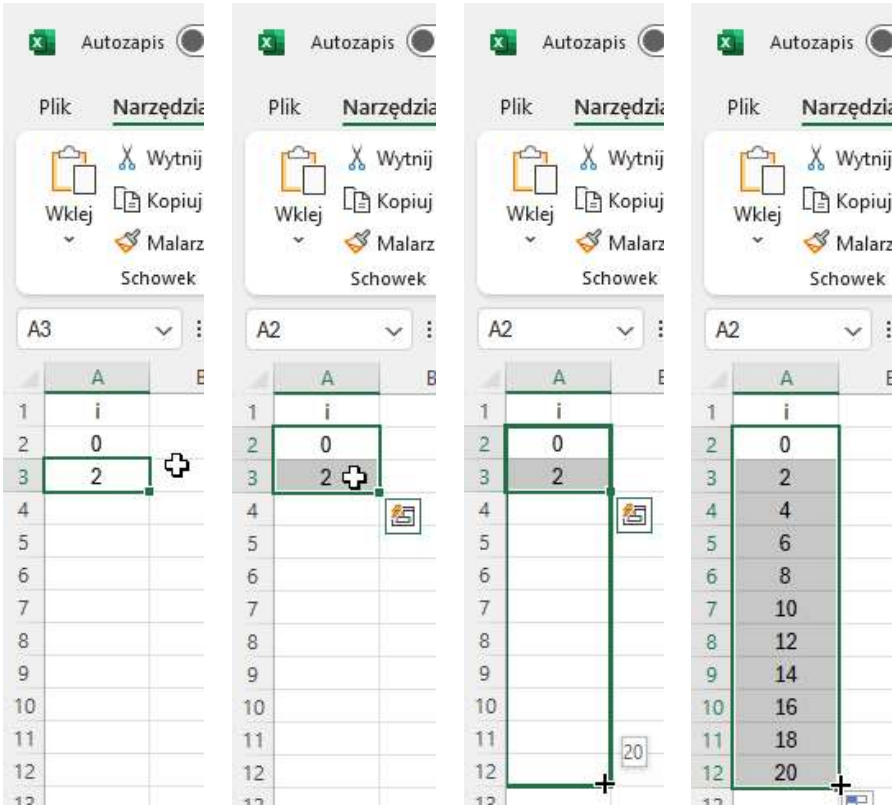


8.5. Ciąg arytmetyczny

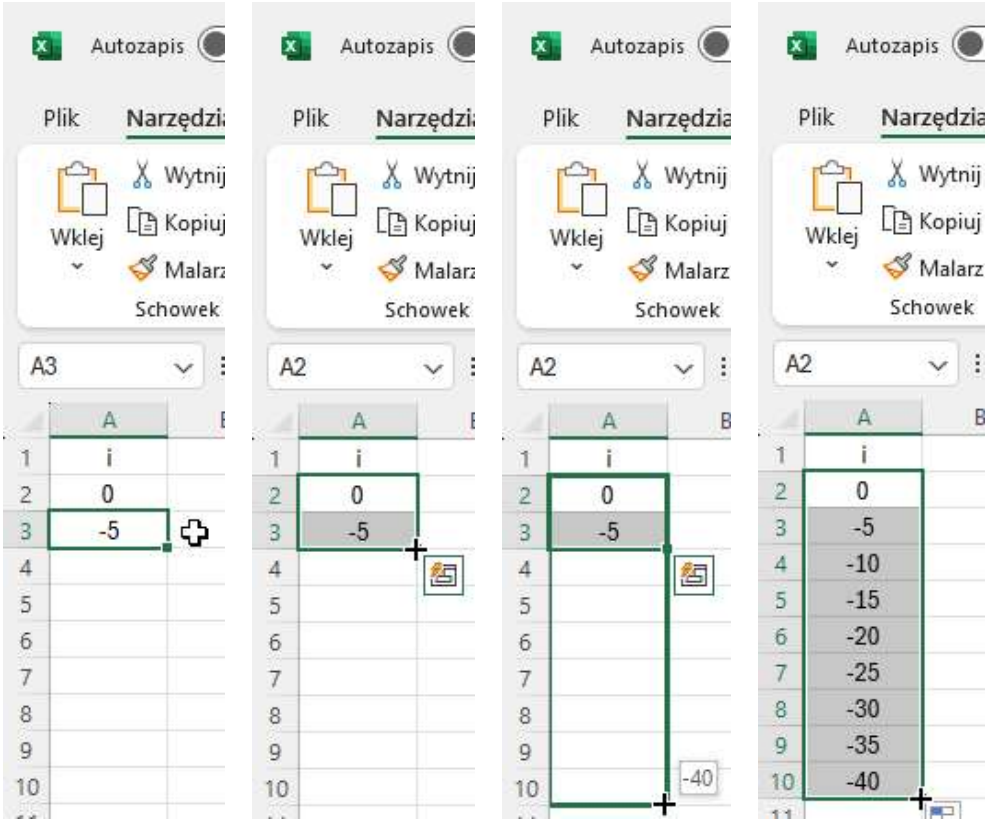
Przykład P8.5.1



Przykład P8.5.2

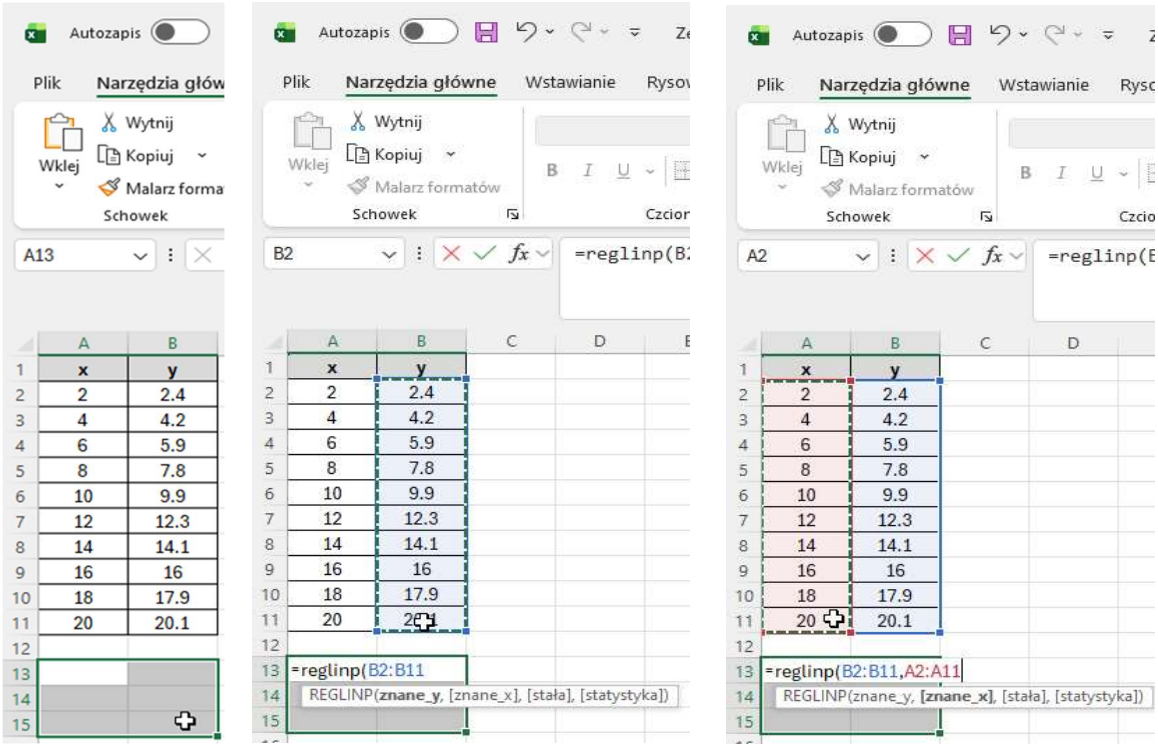


Przykład P8.5.3

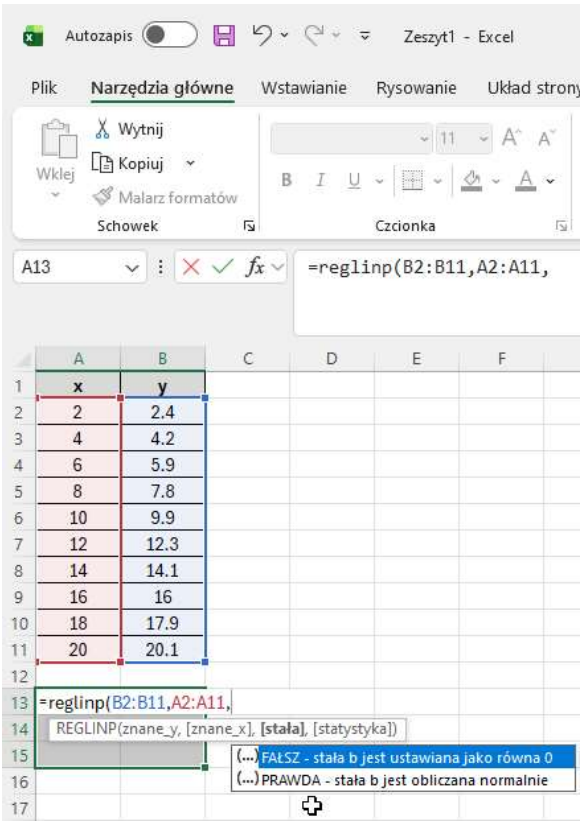


8.6. Regresja liniowa – funkcja REGLINP

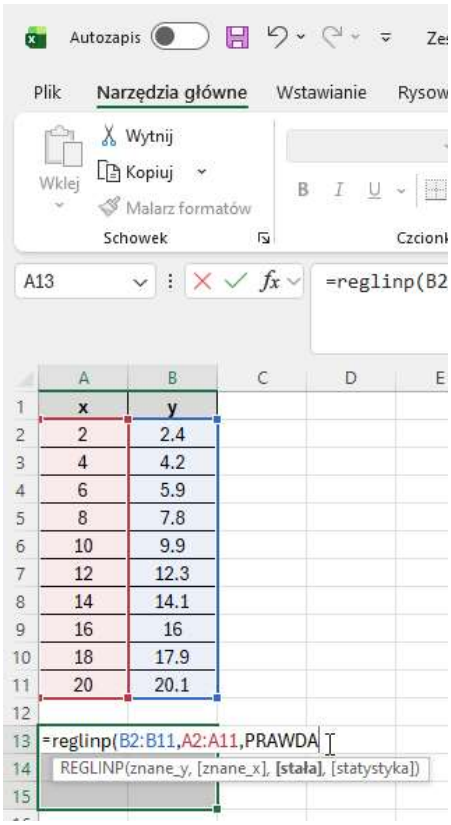
Krok 1 **Krok 2** **Krok 3**



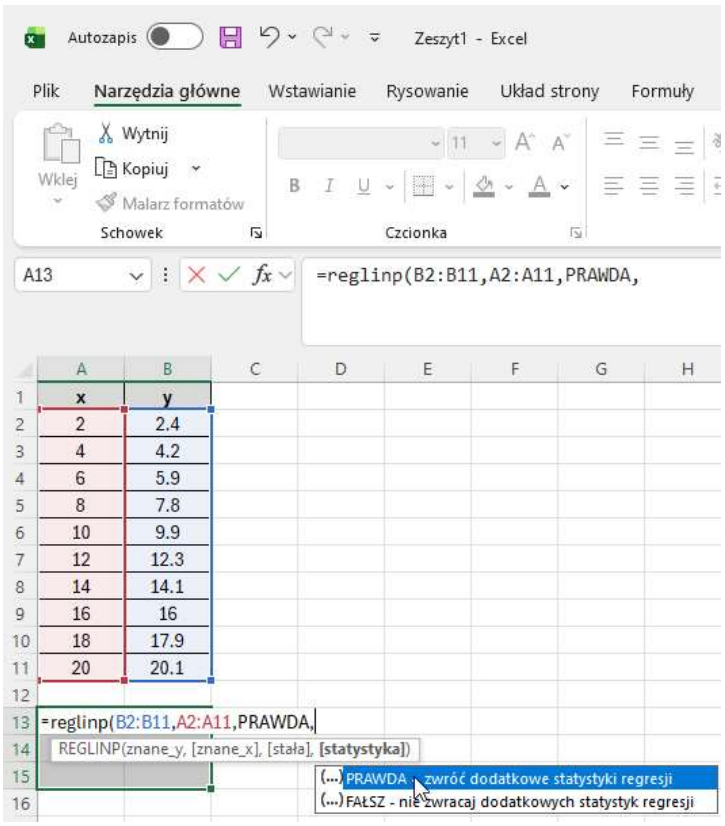
Krok 4



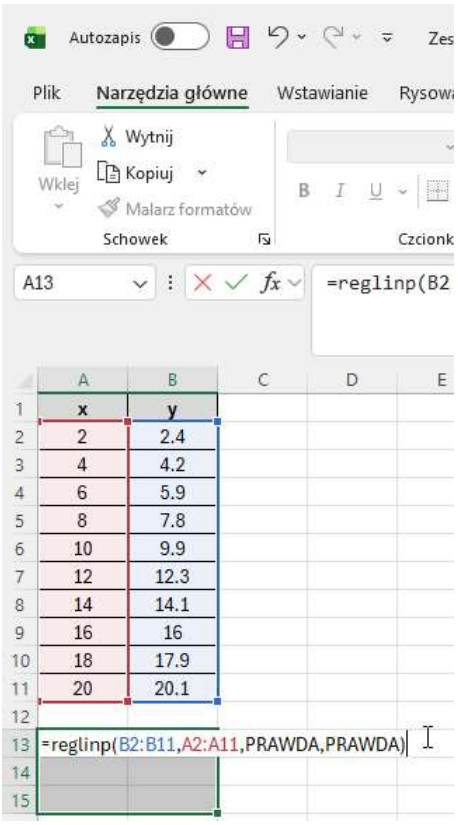
Krok 5



Krok 6



Krok 7

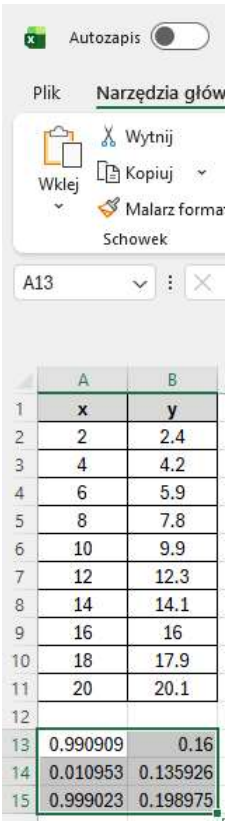


Krok 8

Kombinacja klawiszy:

Ctrl+Shift+Enter

(zatwierdzenie funkcji tablicowej REGLINP)



9. TABLICE

9.1. Alfabet grecki

Litera duża	Litera mała	Nazwa litery
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ	theta
Ι	ι	jota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mi
Ν	ν	ni
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	omikron
Π	π	pi
Ρ	ρ	ro
Σ	σ , ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ipsylon
Φ	φ	fi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

9.2. Tablica rozkładu Q-Dixona

W tablicy podano wartości krytyczne Q_{kryt}, dla których prawdopodobieństwo, że zmienna losowa Q o rozkładzie rozstępów Q-Dixona przyjmie wartość równą lub większą niż Q_{kryt}, wynosi α, tj. $P(Q \geq Q_{kryt}) = \alpha$.

n	α		
	10%	**5%**	**1%**
3	0,885	0,941	0,988
4	0,679	0,765	0,889
5	0,558	0,642	0,782
6	0,484	0,562	0,699
7	0,434	0,508	0,637
8	0,398	0,467	0,591
9	0,370	0,436	0,555
10	0,349	0,412	0,526
11	0,331	0,392	0,503
12	0,317	0,376	0,483
13	0,305	0,362	0,466
14	0,294	0,350	0,452
15	0,285	0,339	0,439
16	0,277	0,329	0,427
17	0,269	0,321	0,417
18	0,263	0,314	0,408
19	0,256	0,307	0,400
20	0,251	0,301	0,392
21	0,246	0,295	0,385
22	0,242	0,290	0,379
23	0,238	0,285	0,374
24	0,234	0,280	0,367
25	0,230	0,276	0,363
26	0,227	0,273	0,358
27	0,224	0,269	0,354
28	0,221	0,266	0,350
29	0,218	0,262	0,346
30	0,216	0,259	0,343

9.3. Tablica rozkładu t-Studenta

W tablicy podano wartości krytyczne $\boldsymbol{t_\alpha}$, dla których prawdopodobieństwo, że wartość bezwzględna zmiennej losowej $\boldsymbol{T}$ o rozkładzie t-Studenta przyjmie wartość równą lub większą niż t_α, wynosi α, tj. $\boldsymbol{P(|\,T\,| \geq t_\alpha) = \alpha}$.

k	α								
	0,5	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	1,0000	3,0777	6,3138	12,706	31,821	63,657	127,32	318,31	636,62
2	0,8165	1,8856	2,92	4,3029	6,9646	9,9248	14,089	22,327	31,599
3	0,7649	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,215	12,924
4	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	0,7267	1,4759	2,015	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9688
7	0,7111	1,419	1,8946	2,3646	2,998	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079
8	0,7064	1,3968	1,8595	2,306	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413
9	0,7027	1,383	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809
10	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	0,6974	1,3634	1,7959	2,201	2,7181	3,1058	3,4966	4,0347	4,437
12	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788	2,681	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,852	4,2208
14	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405
15	0,6912	1,3406	1,753	2,1314	2,6025	2,9467	3,286	3,7328	4,0728
16	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,252	3,6862	4,015
17	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	0,6876	1,3277	1,7291	2,093	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	0,6870	1,3253	1,7247	2,086	2,528	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193
22	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,505	3,7921
23	0,6853	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,104	3,485	3,7676
24	0,6848	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7455
25	0,6844	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	2,0782	3,4502	3,7251
26	0,684	1,315	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,435	3,7066

k	α								
	0,5	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
27	0,6837	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,421	3,6896
28	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	0,6830	1,3114	1,6991	2,0452	2,462	2,7564	3,038	3,3962	3,6594
30	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,75	3,0298	3,3852	3,646
32	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218
34	0,6818	1,307	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,002	3,3479	3,6007
36	0,6814	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	2,5821
38	0,6810	1,3042	1,686	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,319	3,5657
40	0,6807	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,551
42	0,6804	1,3020	1,682	2,0181	2,4185	2,6981	2,963	3,296	3,5377
44	0,6801	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258
46	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,687	2,9488	3,2771	3,515
48	0,6796	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051
50	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,937	3,2614	3,496
55	0,6790	1,2971	1,673	2,004	2,3961	2,6682	2,9247	3,2561	3,4764
60	0,6786	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6693	2,9146	3,2317	3,4602
65	0,6783	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,906	3,2204	3,4466
70	0,6780	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,435
80	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,887	2,1953	3,4163
90	0,6772	1,2910	1,662	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	0,6770	1,2901	1,6602	1,984	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905

9.4. Tablica rozkładu χ^2

W tablicy podane są wartości krytyczne χ_α^2 takie, że prawdopodobieństwo przyjmowania przez zmienną losową Y o rozkładzie chi-kwadrat wartości co najmniej równych χ_α^2 jest równe α, tj. $P(Y \geq \chi_\alpha^2) = \alpha$.

m	α										
	0,99	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	0,000	0,004	0,016	0,064	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,020	0,103	0,211	0,446	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,352	0,584	1,005	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,34
4	0,297	0,711	1,064	1,649	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,67	13,28
5	0,554	1,145	1,610	2,343	4,351	6,064	7,289	9,236	11,07	13,39	15,09
6	0,872	1,635	2,204	3,070	5,348	7,231	8,558	10,64	12,59	15,03	16,81
7	1,239	2,167	2,833	3,822	6,346	8,383	9,803	12,02	14,07	16,62	18,47
8	1,646	2,733	3,490	4,594	7,344	9,524	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09
9	2,088	3,325	4,168	5,380	8,343	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67
10	2,558	3,940	4,865	6,179	9,342	11,78	13,44	15,99	18,31	21,16	23,21
11	3,053	4,575	5,578	6,989	10,34	12,90	14,63	17,27	19,67	22,62	24,72
12	3,571	5,226	6,304	7,807	11,34	14,01	15,81	18,55	21,03	24,05	26,22
13	4,107	5,892	7,042	8,634	12,34	15,12	16,98	19,81	22,36	25,47	27,69
14	4,660	6,571	7,790	9,467	13,34	16,22	18,15	21,06	23,68	26,87	29,14
15	5,229	7,261	8,547	10,31	14,34	17,32	19,31	22,31	25,00	28,26	30,58
16	5,812	7,962	9,312	11,15	15,34	18,42	20,46	23,54	26,30	29,63	32,00
17	6,408	8,672	10,08	12,00	16,34	19,51	21,61	24,77	27,59	30,99	33,41
18	7,015	9,390	10,86	12,86	17,34	20,60	22,76	25,99	28,87	32,35	34,80
19	7,633	10,12	11,65	13,72	18,34	21,69	23,90	27,20	30,14	33,69	36,19
20	8,260	10,85	12,44	14,58	19,34	22,77	25,04	28,41	31,41	35,02	37,57
21	8,897	11,59	13,24	15,44	20,34	23,86	26,17	29,61	32,67	36,34	38,93
22	9,542	12,34	14,04	16,31	21,34	24,94	27,30	30,81	33,92	37,66	40,29
23	10,20	13,09	14,85	17,19	22,34	26,02	28,34	32,01	35,17	38,97	41,64
24	10,86	13,85	15,66	18,06	23,34	27,10	29,55	32,20	36,41	40,27	42,98

m	α										
	0,99	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
25	11,52	14,61	16,47	18,94	24,34	28,17	30,67	34,38	37,65	41,57	44,31
26	12,20	15,38	17,29	19,82	25,34	29,25	31,79	35,56	38,88	42,86	45,64
27	12,88	16,15	18,11	20,70	26,34	30,32	32,91	36,71	40,11	44,14	46,96
28	13,56	16,93	18,94	21,59	27,34	31,39	34,03	37,92	41,34	45,42	48,28
29	14,26	17,71	19,77	22,47	28,34	32,46	35,14	39,09	42,56	46,69	49,59
30	14,95	18,49	20,60	23,36	29,34	33,53	36,25	40,26	43,77	47,96	50,89

9.5. Podstawowe stałe matematyczne

Liczba pi: π = 3,141592653589

Liczba Eulera: e = 2,718281828459

9.6. Logarytmy

Definicja: jeżeli $a^c = b$, to $\log_a b = c$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$

Działanie	**Własność**	**Uwagi**
Suma logarytmów	$\log_a m + \log_a n = \log_a(m \cdot n)$	
Odejmowanie logarytmów	$\log_a m - \log_a n = \log_a\left(\frac{m}{n}\right)$	
Logarytm z liczby potęgowanej	$\log_a b^k = k \log_a b$	$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
Logarytm o podstawie w postaci liczby potęgowanej	$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$	
Zmiana podstawy logarytmu	$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}$	

Skrócony zapis powszechnych logarytmów:

Logarytm o podstawie 10: $\mathbf{\log_{10}} b \equiv \mathbf{\log} b$

Logarytm o podstawie e: $\mathbf{\log_e} b \equiv \mathbf{\ln} b$

Logarytm o podstawie 2: $\mathbf{\log_2} b \equiv \mathbf{lb}\, b$

9.7. Pochodne funkcji

Definicja: Jeżeli $y = f(x)$, to pochodna w punkcie x_0: $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$ jest definiowana następująco: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Funkcja	**Pochodna**	**Uwagi**
$f(x) = C$ C – dowolna stała*	$f'(x) = 0$	*niezależna od x
$f(x) = x^a$ $a \neq 0$	$f'(x) = ax^{a-1}$	
$f(x) = a^x$ $a \neq 0$	$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \ln a}$	gdy $f(x) = e^x$ to $f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ $x \neq 0, a \neq 0$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	gdy $f(x) = \ln x$ to $f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = C \cdot g(x)$	$f'(x) = C \cdot g'(x)$	
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$	gdy $f(x) = \frac{1}{[g(x)]^a}$ to $f'(x) = \frac{-a \cdot g'(x)}{[g(x)]^{a+1}}$
$f(x) = g[h(x)]$	$f(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$	

Uwaga: jeżeli y jest funkcją wielu zmiennych, tj. $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, to pochodną y po zmiennej x_i definiuje się analogicznie: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta \boldsymbol{x_i} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f(x_i+\Delta x_i)-f(x_i)}}{\boldsymbol{\Delta x_i}}$.

Wówczas stosowalne są wzory w powyższym wykazie, przy czym wszystkie zmienne poza x_i traktuje się jako stałe (niezależne od x_i).